

ONDAS (Motivación a lo largo de todo el curso) $\rightarrow$ Tema recurrente

EN LA FÍSICA: OLAS EN EL MAR, SONIDO, LUZ, RADIO, ETC.

EL FENÓMENO PARTICULAR VA A ESTUDIARSE + EN PROF. EN CADA CURSO ESPECÍFICO,
CON LA EXCEPCIÓN DE LA LUZ QUE NO VA A OCUPAR EN LA ÚLTIMA PARTE

RELACIONADA MATERIA

ANTES DE ENTRAR EN EL PROBLEMA DE OTRAS VAMOS A ~~REVISAR~~ "REVISAR"

AMPLIAR UN POCO LOS CONCEPTOS SOBRE OSCILACIONES (Tema visto en Física 1)

Y A CONTINUAMOS EL PROBLEMA DE OSC. ARM. SIMPLE 1D. VAMOS A REVISAR ESTE

TEMA Y EXTENDERLO A SISTEMAS CON MÁS "GRADOS DE LIBERTAD"

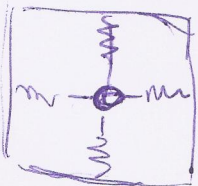
NÚMERO MÍNIMO DE ^{COORDENADAS} ~~NECESARIAS~~ NECESARIAS PARA DESCRIBIR COMPLETAMENTE ~~EL~~ ^{LA POSICIÓN} UN SISTEMA.

MÍNIMO ~~DE~~ SISTEMA DEBE EL NÚMERO DE VISTA DE SISTEMAS OSCILANTES, MEMOS

DE LOS QUE CON 1 GRADO DE LIBERTAD $\rightarrow$ Resorte + masa
Resorte

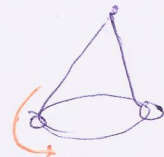
AGREGAMOS CON. RESISTENCIA $\rightarrow$ AMORTIGUACIÓN, Fricción

PASAMOS A SISTEMAS CON + GRADOS DE LIBERTAD



○—m—○—m—○—m—○

○—m—○—m—○—m—○
| | | |
| | | |
○—m—○—m—○—m—○



Relación
cónica

MOSTRA EL LÍMITE DE CONTINUO (∞ GRADOS DE LIBERTAD) $\rightarrow$ ondas

Las ondas es cuando nos ~~construimos~~ damos una visión que podemos utilizar para describir ondas estacionarias como las de una cuerda de guitarra, o vibraciones como las olas del mar

Esto nos servirá para dar un enfoque de TIB introduciendo a la luz
 ↳ óptica física (Polarización, interferencia, difracción).

~~Estados de onda~~

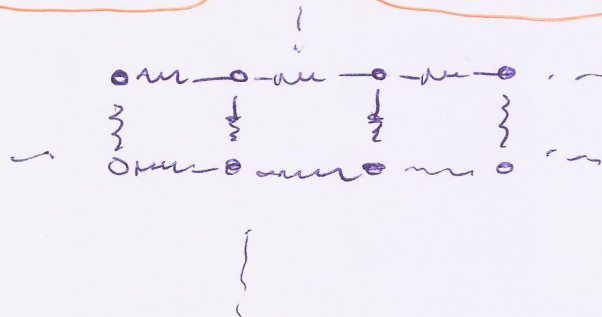
¿X? empieza con sist. oscilantes?

- sistemas mecánicos basados en resortes y péndulos / ESTACIONARIOS / ARMADOS
- cuerdas (c/ resonancia secciona requiere un mov. armónico)
- Resonancia → instrumentos musicales, circuitos (eléctricos) → RADIO/TV

- ondas EM → luz → óptica.
 ↳ calor (infrarrojo)

Simil a cuerdas
 Para no ser tan fácil ver q' ~~oscila~~ ^{oscila} ~~oscila~~

- Átomos en un sólido



- partículas elementales → teorías de cuerdas → ~~oscilaciones~~ ^{estados} vibracionales

~~Revisar~~

¿X Q' ondas?

③

Cuando vemos sistemas forzados vemos que hay ciertas frecuencias o "Modos Normales" en los que el sistema físico responde preferentemente
→ RESONANCIA (Fenómeno que ocurre si F_A con el $1D$)

Las resonancias de sistemas + complejos nos sirven p/sacar provecho de un sistema dado, por ejemplo amplificar ciertos rangos de ondas musicales en una guitarra o un piano, etc. o bien para

caracterizar un dado sistema. Si conozco las resonancias puedo inferir

características de sistemas incluso sin "verlo", esto es obviamente inútil en un osc. $1D$ de una sola masa, pero de fundamental importancia en sistemas + complejos.

Todo esto

~~se refiere a~~
se refiere a

la interacción de ondas con objetos oscilantes. ~~estas~~

Imaginemos que tenemos un conjunto de masas muy grande, tal como ocurre entre el sol y los planetas. No es difícil imaginar que (al igual q' en el caso de una masa en $1D$) la resonancia va a estar relacionada con la masa de los objetos y con la fuerza de los resortes.

Supongo que no será para p/uds. si les digo que va a aparecer

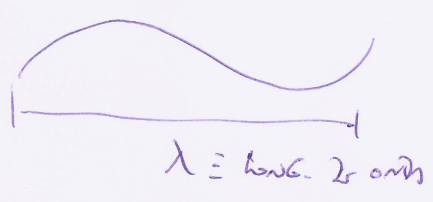
Una resonancia por cada grado de libertad del sistema

Entonces las frecuencias de resonancia nos permitirán inferir

características de sistemas mecánicos mediante que ondas externas interactúan con él → ESPECTROSCOPIA de vibración

Esto ~~para~~ es sumamente importante cuando "No se ven" los componentes de sistema: ej. masas muy pequeñas (átomos) formando parte de un sistema en el q' se actúan mutuamente por una fuerza semejante a un resorte (vamos a ver que eso siempre se puede cumplir en algún rango de aproximación). $\rightarrow V \propto x^2 \rightarrow$ pos. equivalentes $\Rightarrow$ si queremos saber cuánto fuerza se hacen o cuál es la masa de los átomos $\rightarrow$ fuerzas de sistema en un rango amplio de frecuencias con ondas (sonido, mecánicas, EM, ...) y vamos cuáles son sus resonancias

- Un extra es que las ondas cuando se encuentran con un obstáculo de dimensiones comparables a la zona en q' varía la perturbación



Experimentos famosos como interferencia y difracción

$\rightarrow$ las ondas nos van a proveer una herramienta que permitirá además inferir que tan separados están los átomos.

Bibliografía:

- ondas: - ondas, Frank S. Crawford, Berkeley Physics Course Vol. 3
Reverte
- ondas: el físico, Oscar Martínez, EUBS (online)
- Vibrations and waves, A. P. French, MIT intro. Physics series
- $\Rightarrow$ castellano $\rightarrow$ Reverte
inglés $\rightarrow$ Norton & Company
- óptica: óptica, Hecht y Zajac

P/empieza $\rightarrow$ sistemas que permanecen confinados en una zona limitada por 2 puntos de retorno, alrededor de una posición media.

los ejemplos, como vimos, son: una masa con 1 resorte, un péndulo q' oscila en un punto, También otros movimientos + complicados (~~oscilaciones~~ como una masa con 2 resortes en 1D )

o q' queda fijo en el curso, como circuitos de corriente alterna, en donde una fuerza eléctrica sinusoidal ~~oscila~~ (tensión o voltaje) hace oscilar a los electrones dentro de un metal ~~oscilando~~ haciendo oscilar la corriente eléctrica (circuitos con capacitores e inductancias, cuya V es $\propto \frac{dQ}{dt}$ o $Q = \int i dt$ o di/dt , resp.)

Todos estos sistemas tienen la particularidad de que su estado se describe con 1 sola coordenada (Posic. resp. a algún punto, ángulo resp. de la vertical, corriente eléctrica) $\rightarrow$ 1 grado de libertad

Esta es una idea que se conserva tendiendo a que haya simplificaciones o aprox. (que no sabemos resolver) que llevan a problemas típicamente + complicados $\rightarrow$ resistivamente $\rightarrow$ llega a uno simple que sí podemos resolver, o q' al menos resulta + fácil.

(Recomendar q' lean intro de máquinas sobre el tema de aproximaciones)

Además de us q' propone él (Notas ~~enfocadas~~ en los libros $\rightarrow$ estabilidad cuántica, que está sujeta a un cambio en caso de péndulo, que la masa o la bolita no se deformen, que la cuerda del péndulo no realice mov. ondulatorios, que no se estire ni se rompa, que ^{la masa} no rota sobre sí eje, que el resorte ejerza una f. lineal, etc.)

Péndulo $\rightarrow$ en principio tiene 2 gr. de lib. ^{por eficiencia}, pero si no hay + q' frena y ~~se restringe~~ la tensión del hilo, el mov. se restringe al plano formando X estas fzas. $\Rightarrow$ 1 gr. lib. $\rightarrow$ alguno

ESTE TIPO DE MOVIMIENTOS SE VIVEN $\rightarrow$ ELEMENTOS EN COMÚN (6)
 CON OTROS SIST. EN Q' UN SIST. SE ALEJA DEL PUNTO DE EQUILIBRIO (ESTABLE)
 Y POR LO TANTO SIEMPRE TIENDE A VOLVER $\rightarrow$ FES (BASTANTE). Además,
 EL PROBL. DE OSC. ARMÓNICO ES UNO DE LOS ÚNICOS PROBLEMAS CON
 CONSECUENCIAS O IMPLICACIONES INTERESANTES, ~~QUE LOS FÍSICOS PODRÍAN RESOLVER~~
 EXACTAMENTE (DENTRO DE LAS APROXIMACIONES MATEMÁTICAS). Durante el desarrollo
 iremos haciendo explicaciones
 otras approx.

Vivimos en 1º año de estudio: PÉNDULO SIMPLE

UNA PEQUEÑA ESFERA COLGADA DEL TECHO POR UN HILO



ESTÁ CLARO QUE ACÍ FALTAN MUCHOS DETALLES PARA DESCRIBIR EL PROBLEMA
 PERO Q' ESTAMOS ENFRENTANDO, PERO LA COSTUMBRE NOS LLEVA A PENSAR
 EN CIERTAS APPROX. (MASA PUNTUAL, SÓLO INEXTENSIBLE, NO HAY FUERZAS
 DE CORTE, ETC.) QUE NO ESTÁN DE MÁS TENER EN CUENTA. OTRA VEZ
VER LÍNEA MATEMÁTICA

ES DECIR, CUANDO ENFRENTAMOS EL PROBLEMA DE UNA PLUMADA COLGADA
 DE UN HILO, LO REDUCIMOS MÁS AL PUNTO DE MÓVIL ACCESIBLE PARA LAS
 MANIFESTACIONES QUE TENEMOS, ~~la línea matemática~~ ESO NOS VA A LIMITAR
 A LA HORA DE GENERALIZAR PERO NOS DA UN PUNTO DE PARTIDA.

DEFINIMOS QUE LOS OSCILACIONES SE CARACTERIZAN POR UN VALOR MÁXIMO DE
UNA POSICIÓN MEDIA, ESO SUGIERE QUE CADA VEZ Q' EL MÓVIL SE ALEJA

DE LA POSICIÓN MEDIA UNA FUERZA LO DEVUELVE A ELLA $\rightarrow$ PUNTO DE EQUILIBRIO ESTABLE.

¿CUAL ES ESE PTO?

EN ESTE CASO, ES FÁCIL VER QUE EL PUNTO DE EQUILIBRIO ES AQUEL EN
 EL CUAL LA TENSION DEL HILO COMPENSA AL PESO DE LA ESFERA

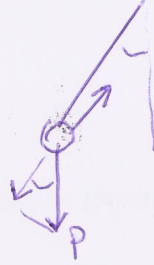


LA SUPOSICIÓN IMPLICITA AQUÍ ES Q' LA SÓLO ES INEXTENSIBLE, ASÍ
 NO TENEMOS UN CAMBIO DE LONGITUD POR ESTIRAMIENTO AL MASA
 COMPENSA EL PESO, POR SUPUESTO ESTO NOS LIMITA EL CUANTO A EFECTOS.

NOTAR QUE EN ESTE CASO

SE COMPLEJA SÓLO UNA

7



COMPONENTES DEL PESO Y ESTANCOS

LA LONG. DEL HILO DEPENDE DEL ÁNGULO. (PUNTO DE EQUILIBRIO)

RESUMIENDO LAS SUPOSICIONES:

- HILO SIN MASA ($m_H \ll m_{\text{bola}}$)
- BOLITA RÍGIDA $\rightarrow$ EN EL MOV. PENDULO NO HAY UN GRADO EFECTO DE DEFORMACIÓN. $\rightarrow$ SÓLO GRADOS DE LIB. DEL CUERPO RÍGIDO (6: ROT. Y TRASL.)
- BOLITA PUNTUAL $\rightarrow$ ELIMINAMOS LA ROTACIÓN $\Rightarrow$ QUEDAN 3 GR. DE LIB.
- HILO INEXTENSIBLE $\rightarrow$ SE PUEDE SUPONER Q' SE DEFORMARÍA LA TANTO TANTO EN LO MENOS EFECTUABLE POSIBLE $\Rightarrow$ 2 GR. LIBERTAD (SUPERFICIE ESFÉRICA)

LAS SUPOSICIONES NOS PERMITIRÁN RESOLVER EL PROBL. Y REALIZAR PREDICCIONES QUE PODRÍAMOS CONTRASTAR EXPERIMENT. Y USAR CORRECCIONES SI ES NECESARIO AJUSTAR EL MODELO.

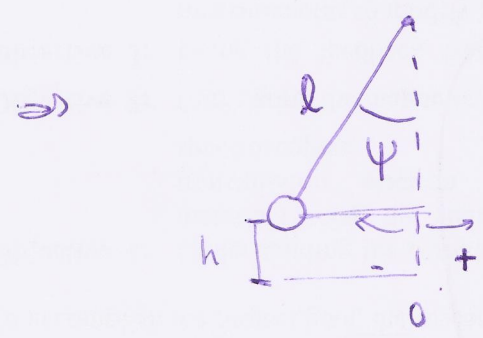
PARA CONCRETAR VAMOS A ANALIZAR EL CASO EN Q' EL MOVIMIENTO OCURRE EN UN PLANO. SI SÓLO TENEMOS UN PÉNDULO Q' ES ESPESADO DE LA POSICIÓN DE EQUILIBRIO, LA $\vec{r}$ Y EL $\vec{\theta}$ SIEMPRE ESTÁN EN EL MISMO PLANO, POR LO QUE ESTE CASO ES BASTANTE RÁPIDO (DENTRO DE LOS LÍMITES DE VALIDEZ DE LAS SUPOSICIONES).

$\Rightarrow$ EL PROBLEMA SE REDUCE A 1 GR. DE LIBERTAD (MOV. SOBRE EL ARQUICÍRCULO DE UNA CIRCUNFERENCIA).

¿cuál es la mejor elección de coord. para este problema?

Sabemos que esta es la posición de equilibrio $\rightarrow$ corres. al hilo en posición vertical

$\Rightarrow$ es un elegir la coord. θ de $\Delta = 0$ en esta posición.



Veamos algunas cantidades de interés: si bien la coordenada es ψ , el desplazamiento es $(l \cdot \psi)$, por lo que $v = l \dot{\psi}$ y $a = l \ddot{\psi}$

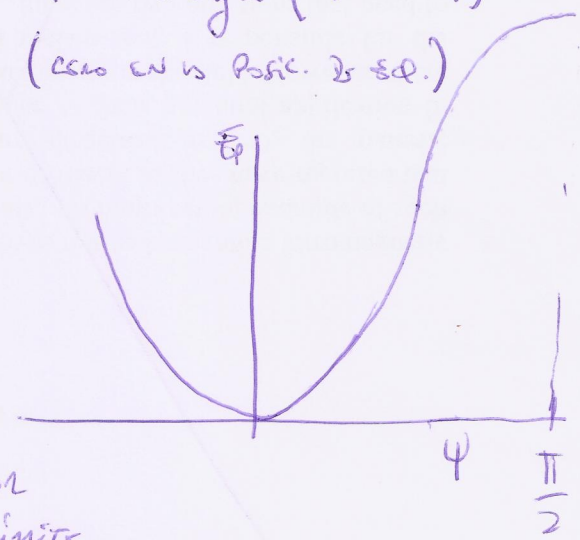
Antes de entrar en la ecuación dinámica veamos la energía

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\psi}^2$$

$$E_p = mgl(1 - \cos \psi)$$

(esto es la posic. de eq.)

NOTAR que $\frac{\pi}{2}$ es el límite de mov. por el techo, en GBL. Estaremos por debajo de este límite.



otras variables $\rightarrow g = cte$ ($l \ll R_T$)

línea recta $\rightarrow$ elimina la corrección por no considerar la fl. de la gravedad con h

Problema 8

El. Esquem. de energía q' si sabemos d la posic. de su posic. (9)

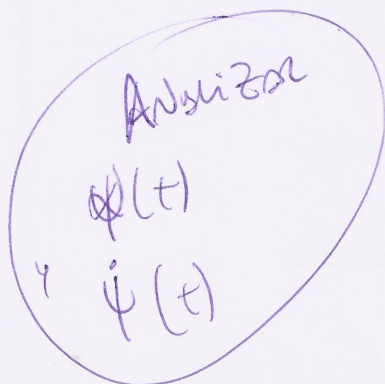
De eq. y la sistema, quem' hacia el equilibrio, en donde se cancela

Es máxima y (si no hay ningún mecanismo de disipación) pasará a la

pos. igual a la misma altura, del otro lado de la posición vertical

(cons. de E). Este mov. se repite' indef. si no hay ningún tipo de

rozamiento. $\Rightarrow$ mov. periódico



En realidad sabemos que un péndulo "real" (valor real) no es a osc. ∞

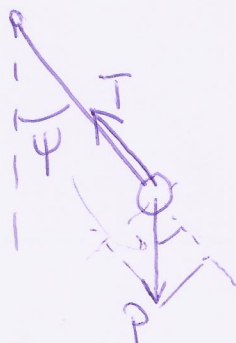
Debido al roz. y es $A(t)$, en particular decrece.

Digamos que estamos estudiando a problemas en q' el roz. afecta

apreciablemente el mov. weg = de muchas osc. o (o más) estamos
estud. las osc. mucho antes de q' se vean apreciablemente afect.

Por la disipación. (comprobar un péndulo en aire, agua, dulce de leche, etc)

Dinámica:



$$\text{Tangencial) } m a_t = -mg \sin \psi + F_R$$

$$\text{Centrífuga) } m a_c = T - mg \cos \psi$$

Digimos q' analiz. el probl. como FR es despreciable, entonces

(10)

$$m l \ddot{\psi} = - mg \sin \psi$$

$$\ddot{\psi} = - \frac{g}{l} \sin \psi$$

la oím nos sirve
p/ obt. T

Esta es una EC. Diferencial No lineal de 2º orden

Las EC. de este tipo no ~~se~~ tienen una única solución y no
pueden ser resueltas analíticamente (en general). Entonces
vamos a agregar una aproximación más.

Vamos a resolver el problema para ángulos pequeños, caso que
pueda resolverse usando el desarrollo en serie de Taylor del seno
cerca de $\psi = 0$

$$\rightarrow \sin \psi \approx \psi - \frac{1}{3!} \psi^3 + \frac{1}{5!} \psi^5 - \dots$$

Con lo cual, si ψ es suf. pequeño t.q. $\psi \gg \psi^3$ (verificar)

Podemos reempl. $\sin \psi \approx \psi \rightarrow \ddot{\psi} = - \frac{g}{l} \psi$

Que es una EC. dif. lineal de 2º orden con coef. constantes, para
la cual (teo. de Poincaré - Liouville) la solución existe y es única.

$\rightarrow$ No es la soluc. + general al problema, ahora estamos
diciendo que usar en tanto $\sin \psi \approx \psi$, lo cual depende

del grado de aprox. q' queramos dar al resultado.

¿i En qué afecta? $\rightarrow \psi(t)$ va a ser una función que se aproxima al result. exp.
Aproximación.

$\ddot{\psi} = -\frac{g}{L} \psi$ ES la ec. conocida como oscilador armónico ligar (11)

cuya solución es una oscilación armónica (sinusoidal)

que puede expresarse como $\psi = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ (podría ser sen)

ET. PROBLEMA

Verifica que $A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ es solución

Verif. que $A \sin(\omega_0 t + \varphi')$ también

¿cómo puede ser esto si la soluc. es única?

LA EC. es entonces
$$\ddot{\psi} = \frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\omega_0^2 \psi$$

 ω_0^2 es positivo

Para resolver el problema hay que integrar 2 veces (Deriv. 2°)

⇒ APLICACIÓN 2 ctas de integración (Dada esto en la memoria)

Lo q' buscamos es una función cuya derivada 2° sea igual a la función multiplicada por una constante explícitamente negativa ($-\omega_0^2$), sabemos

que sen o cos cumplen esto pero eso también puede ser la exponencial

Substituyendo q' la solución es $\psi = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\omega_0 = \frac{g}{L}$
 (Amplitud) (Fase inicial) (puede variar equiv. cosa)

⇒ las constantes A y φ quedan en principio indeterminadas (ctas de integración)

→ Recordemos que esto describe una situación real.

⇒ A y φ salen de datos, mediciones, condiciones iniciales
 $\psi(t=0) = \psi_0$
 $\dot{\psi}(t=0) = 0$
 (podría ser a cualquier t) (Esencial la de a algún t en datos)

⇒ caso en el que seleccionamos $\psi = \psi_0$ (es positivo)

(11)

~~seleccionamos~~

$$\Rightarrow \psi_0 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$0 = A \omega_0 \sin \varphi \rightarrow A, \omega_0 \neq 0$$

Si No, caso trivial

$$\Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$$

Como $\cos$ es periódico en 2π lo mismo da cual elija, pero

hay 2 opciones $\rightarrow 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ a)

$\rightarrow \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$ b)

En la opción a) $\rightarrow A = \psi_0$ mientras que en la b) $A = -\psi_0$

Ese signo cubre la diferencia entre haber elegido un $\cos$ que

que "empieza" en 0 ($0, 2\pi$) o uno que empieza en π ($\pi, 3\pi, \dots$ etc)

$$\left(\cos 0 = 1 \text{ pero } \cos \pi = -1 \right)$$

$$\Rightarrow \psi = \psi_0 \cos(\omega_0 t) \text{ y ya tengo la solución completa.}$$

Un enfoque alternativo (más elegante desde lo matemático) es usar las exponenciales. (para los que no tengan miedo $\rightarrow$ Alérgicos al 1 imaginario)

$$\text{Entonces } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ (Fórmulas de Euler)}$$

$$\Rightarrow \text{si proponemos } \psi = A e^{i a t} \text{ y reemplazamos en la ec. dif.}$$

$$\dot{\psi} = i a \psi \rightarrow \ddot{\psi} = -a^2 \psi \Rightarrow \text{si } a = \omega_0 \text{ la solución}$$

es "la misma" de hecho, no tal (etc etc) que lo mismo

vale si usamos $B e^{-i \omega_0 t}$

Con lo cual la solución completa es una suma de ambas.
(esto vale xq en una ecuación dif. li)

⇒ Tenemos 2 soluc. posibles

$$\psi_1 = A e^{i\omega_0 t}$$

$$\psi_2 = B e^{-i\omega_0 t}$$

EN una ec. Diferencial lineal, una comb. lineal de soluciones es solución (verificar)

⇒ Nuestra solución general será de la forma.

$$\psi = A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t} \quad \text{con } A, B \text{ ctes a determinar.}$$

A y B son las ctes que dependen de las cond. inic.

~~Cabe~~ conviene que si bien esto es una representación de la solución real (en realidad)

Nuestra ψ debe ser $\mathbb{R}$ (numéricamente hablando)

⇒ Teniendo q' si tenemos una solución compleja, la parte Re y Im es solución (como la parte Im sin la "i")

Nuestra solución será $\text{Re}(A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t})$

Ambos enfoques son válidos, la elección dependerá de cada caso.

Cuando se den privilegio a la facilidad en la operación con derivadas, el enfoque exp. será preferible, mientras el más complicado con exponentes es generalmente mejor usar seno o coseno (con la fase inicial conllev.).

OTRO RESORTE: EL OSC. ARMÓNICO ES EL RESORTE. SE TRATA DE UN ARROJADOR ELÁSTICO CON UNA FORMA EN REPOSO A LA CUAL INTENTA VOLVER SI ES DEFORMADO.

↳ ES EL NOMBRE GENERAL DE CUALQ. DISPOSITIVO CON UNA F. RESTITUTIVA ELÁSTICA.

PARA RESOLVER EL PROBLEMA, UNA SOLUCIÓN ES LA F. RESTITUTIVA ES LINEAL

CON LA DEFORMACIÓN (LEY DE HOOKE). ESTO ASUME QUE ESTO ES UNA APROX. VALIÉZLA SIEMPRE DE ALGÚN RANGO. TODO EL Q' HAYA TENIDO UN RESORTE EN LA MANO

SABES QUE SI SE LO ESTIRA DEMASIADO, EL MUELLO NO VUELVE A SU FORMA INICIAL

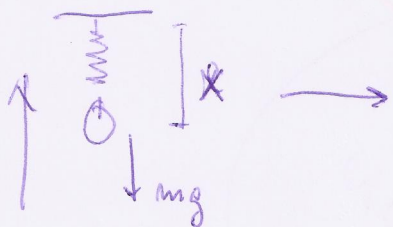
(DEFORMACIÓN PLÁSTICA)



POR OTRO LADO, SI LA LONG. EN REPOSO DEL RESORTE ES l_0 , ESTO NO

SIGNIFICA QUE ESA SEA SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO EN CUALQUIER CASO.

VEAMOS POR EJEMPLO



EN ESTE CASO LA EC. DE NEWTON ES

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - l_0) + mg$$

NOTAR QUE LA EC. OCURRE EN $l_{eq} \neq l_0$ $k(l_{eq} - l_0) = mg$

Y QUE USANDO $\psi = x - l_{eq}$, LA ECUACIÓN DE NEWTON SE PUEDE

$$\left(l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} \right)$$

ESCRIBIR COMO

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\frac{k}{m} \psi$$

LA EC. DEL OSC.

ARMÓNICO 1D IGUAL Q' YA VIMOS, SÓLO QUE $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ EN ESTE CASO.

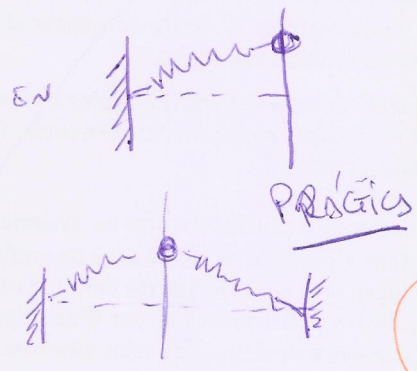
Por lo tanto, todo lo mostrado antes ahora puede aplicarse

al problema de resorte, sabiendo q' oscila MR. & deq

con frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Otros ejemplos q' tambien llevan a la ec. de osc. MR. simple usando resortes son:

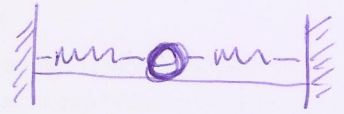
oscilaciones transversales



(Ver ondas = ss Física pág. 16)

(Ver Crawford Cap. 1)

osc. longitudinales



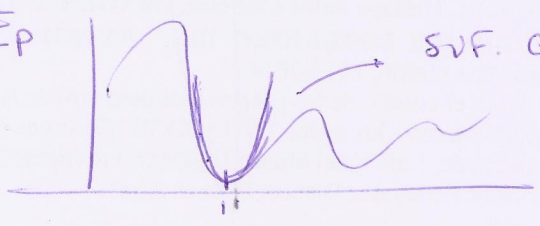
"

ENERGÍA DE OSC. ARMÓNICO LIBRE

Donde que la F. Restitutiva es $\propto$ al desplazamiento (ψ)

su $E_p \propto \psi^2$

, esto puede generalizarse siempre que estudiemos oscilaciones pequeñas MR. de un punto de eq. estable, el cual es el mínimo en E_p



SVF. CERCA DE PUNTO $E_p \propto \psi^2$

Esto es equivalente a hacer el desarrollo en series de Taylor del potencial cerca del punto de eq. Si llevamos a 0 este punto.

$$\Rightarrow E_p(\psi) \approx E_p(0) + \left. \frac{dE_p}{d\psi} \right|_0 \psi + \left. \frac{d^2 E_p}{d\psi^2} \right|_0 \psi^2$$

$$\psi \approx 0$$

signos
pequeños
regiones
= 0

mínimo
 $\Rightarrow = 0$

$$\Rightarrow E_p(\psi) \approx C_1 \psi^2$$

Lo si fueran como muelle q' usa términos de
Muelle orden, pero ya no sería un osc. arm.
simple.

La E_c es, por otra lado, prop. a la velocidad², q' es prop. a $\dot{\psi}^2$

$$\Rightarrow E_c = C_2 \dot{\psi}^2$$

$$\Rightarrow E = C_1 \psi^2 + C_2 \dot{\psi}^2$$

Si usamos la forma global $\psi = \psi_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\Rightarrow E_p(t) = C_1 \psi_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_c(t) = C_2 \omega_0^2 \psi_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

En el caso del ~~resorte~~ $(\psi \approx x)$, $C_1 = \frac{1}{2} m \omega_0^2$

$$\text{y } C_2 = \frac{1}{2} m \Rightarrow C_1 = C_2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow E(t) = C_1 \psi_0^2 \left[\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \right] = C_1 \psi_0^2$$

Que claramente no dep. del tiempo, como es obvio para un oscilador arm.

sin disipación

verlo q' un péndulo

El hecho de que ψ es F. solo depende de ψ y ψ' no hay términos indep. de ψ
 (Ec. ^{lineal} homogéneas) $\rightarrow$ TEO de Existencia y unicidad Sol. gen. ec. lineal homog.

Además la amp. indep. de soluciones es solución.

Esto no ocurre con $\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \sin \psi$ Por ejemplo.

El hecho de que la suma de las soluciones sea solución ~~es~~ es lo que se conoce como Principio de Superposición.

Veamos que ocurre con el caso de un péndulo (Ejercicio Propuesto)

Digamos que la soluc. ψ_1 surge de un conj. de cond. inic.

y de ψ_2 surge de otro conjunto.

¿qué ocurre si superponemos las cond. inic. de ψ_1 y ψ_2 ?

El decir a la posición inicial de ψ_1 le sumamos la de ψ_2 y la convertimos en una nueva posic. inicial, y lo mismo con la velocidad.

La respuesta es que la solución comp. A es suma de las c.i.

Lo a ser $\psi_3(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ Tenemos por
 $\psi_3(t=0) = \psi_1(t=0) + \psi_2(t=0)$
 $\dot{\psi}_3(t=0) = \dot{\psi}_1(t=0) + \dot{\psi}_2(t=0)$ Es lo fácil si $\dot{\psi}_1(0) \neq \dot{\psi}_2(0) = 0$

Queda por verificar la demostración de este resultado, que $\psi_1 + \psi_2$ es solución.

PREGUNTA: ¿qué limitación tengo al sumar los desplazamientos iniciales?

$\rightarrow$ No importa de la zona en que $\psi \gg \psi^3$ (peq. oscilaciones)

o ya

En el caso de EC. lineales inhomogéneas, o sea q' tienen un término indep. de ψ que eventualmente puede depender de t

Este caso va a sernos útil al estudiar sistemas forzados cuando la F externa es indep. de ψ .

En esos casos TB. vale el principio de superposición, veamos:

Sup. q' aplica una fuerza externa $F_1(t)$ u oscilador $\rightarrow$ masa m o K

$$\Rightarrow M \ddot{\psi} = -C \psi + F_1(t)$$

Si en este caso la solución es $\psi_1(t) \Rightarrow M \ddot{\psi}_1 = -C \psi_1 + F_1(t)$ (1)

Repeto el exp. aplicando $F_2(t)$ y la soluc. es $\psi_2 \Rightarrow M \ddot{\psi}_2 = -C \psi_2 + F_2(t)$ (2)

$\Rightarrow$ si superpongo $F_1(t) + F_2(t)$, la solución será $\psi_1 + \psi_2$

Como surge de la suma miembro a miembro de (1) y (2)

(~~no~~ obs. pueden mostrar q' en gnl. esto no es válido para ecuaciones no lineales). $m \ddot{\psi} = -C \psi + F(t)$

Ver si hay +

Aunque nos distanciamos un poco, usamos el Ppio de Superposición. (18)

Para introducir un problema con + grados de lib.

Exponemos un péndulo de longitud l q' puede oscilar en cualquier dirección $\rightarrow$ Péndulo esférico (Cónico?)

En eq. la cuerda está en posic. vertical. No hay z y la masa es $x=y=0$

Si realizo desplaz. Peq. en x o en y (~~no~~ No superpuestos)

Es fácil mostrar que (ángulo):

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{Mg}{l} x$$

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{Mg}{l} y$$

Tan pequeñas que
Aproximo el arco
por una recta. (Circulo)

$\rightarrow$ Son 2 ec. No acopladas ($\ddot{x}$ no dep. de $\ddot{y}$ ni viceversa)

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\text{con } \omega_1 = \omega_2 = \frac{g}{l}$$

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$x_0, \varphi_1, y_0, \varphi_2$ son 4 cond. iniciales de cada caso.

Si superponemos las cond. iniciales en x y en y , usando el Ppio

de superposición, el mov. será una superposición de $x(t) \hat{x}$ con

$$y(t) \hat{y} \rightarrow x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} \rightarrow \text{O sea un mov. en 2D}$$

Gracias al Ppio de superposición podemos resolver ambos mov. por

separado y simplemente sumarlos.

Los 2 Gr. de lib. están en este caso desacoplados.

Caso + simple
de 2 Gr. de
lib. acoplados

Oscilador amortiguado

Mediante estos dispositivos los efectos externos se pueden "Empujar" o "Detener" las oscilaciones de nuestro sist.

En este parte analizaremos el efecto de medio circundante, el cual actúa mediante una resistencia al movimiento.

Para quien haya observado una pluma oscilando en aire, no es novedad decir que se mov. (si bien puede durar un considerablet))

No se extingue ∞ . Es más, es notorio que la amplitud de

mov. decae luego de algunas oscilaciones ϕ , si este medio es suficiente,

se llega a detener.

Esto significa que el aire produce una dissipación de la E del péndulo, ya que la h a la que se llega en ϕ ciclo es menor que en el ciclo anterior.

Imaginen lo que ocurriría en agua, aceite, miel o mercurio & BP. Dices de leche. $\rightarrow$ ¿qué parámetro del medio físico es el que influye?

Notemos que hay dos efectos que conocemos que producen disipación:

a) - Roz. con una superficie $F_{roz} = -\mu N \rightarrow$ PARA EN MEADICIONAR

b) - FUERZAS VISCOSAS $F_v = -\gamma v$

a) Es complicado & resolver analíticamente. Podemos ver que la amplitud se reduce linealmente $\rightarrow$ SUBIR WEB

b) Vamos a resolverlo analíticamente.

la ecuación diferencial es, en forma:

(20)



$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} = -\omega_0^2 \psi - \gamma \dot{\psi}$$

Formas de obtenerlo:
Dep. de la masa y de
de la γ

nota q' en el caso de resorte $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$; $\psi \equiv x$ (10)

En el caso de péndulo

$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$; ψ es el ángulo

y d'En ambos casos γ tiene unidades de frecuencia.

la ec. es lineal en ψ y sus derivadas, entonces usamos el mismo tipo de solución previo $\rightarrow$ partimos de la exponencial y usamos que resultado se obtiene.

$$\psi = e^{at} ; \quad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = a^2 e^{at} ; \quad \frac{d\psi}{dt} = a e^{at}$$

si reempl. en la ecuación diferencial, usamos a

$$a^2 + \gamma a + \omega_0^2 = 0$$

lo cual nos lleva a $a = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2}$

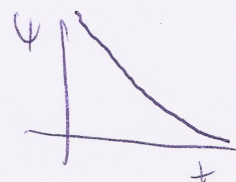
$$a = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

i) El signo de este término nos dice si los raíces son reales o complejas. Si γ es tan grande q' el sistema no llega a oscilar

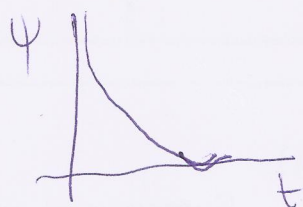
$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \gg \omega_0^2$$

Oscilador sobreamortiguado

raíces reales.



ii) Si $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$



→ Apenas puede llegar a cero sin oscilar
es el caso crítico

→ Amort. crítico

Disminución
rápida de la oscilación

iii) $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 < \omega_0^2$



→ El amort. es pequeño comparado con la energía del mov.

(Recuerda q' $\omega_0^2 \propto g/k$ según el caso)

⇒ El sistema realizará oscilaciones

Vemos que, como en el caso de la resorte, el caso en el cual los
datos son imaginarios (y por lo tanto pueden escribirse como seno y coseno)
nos da el caso oscilatorio

→ Solo estudiaremos este caso

En este caso $a = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega'$ (en el exponente)

Con $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

→ una frecuencia menor que la "natural" de nuestro oscilador.

Entonces, de nuevo como en el caso de la resorte, las soluciones serán de la forma

$\psi_1 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega't}$

y $\psi_2 = e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega't}$

De forma completamente análoga a lo visto para el oscilador libre
(nota q' solo aparece el factor $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$ atenuando la amplitud.)

Obtenemos → $\psi = \psi_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega't + \phi)$

O sea, una oscilación armónica de Frec. ω' , Frec. inicial y amplitud dadas por las cond. iniciales, esta última decreciente con el tiempo como $\psi_m e^{-\frac{\gamma}{2}t}$

(hacer un gráfico cualitativo)

Mencionar ϕ' FUS un PLETOZO, PERO como tenemos soluc. Sabemos ϕ' es 4 UNIC (a comb. 2r ambas) por ϕ' es 4 ES WEN

¿Qué ocurre con la energía?

La E. total de oscilador simple es (vimos)

$$E_T(t) = \frac{1}{2} m C_2 [\omega_0^2 \psi^2 + \dot{\psi}^2]$$

(en el anterior $C_2 = \frac{1}{2} m$)

¿Vemos
cbr.

$$\begin{aligned} \text{Aquí también } \psi \text{ y } \dot{\psi} &= \psi_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[-\frac{\gamma}{2} \cos(\omega't + \phi) \right. \\ &\quad \left. \psi_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega't + \phi) \right. \\ &\quad \left. - \omega' \sin(\omega't + \phi) \right] \end{aligned}$$

Que reemplazando (y usando la misma convención) da:

$$\begin{aligned} E_T(t) &= C_2 \psi_m^2 e^{-\gamma t} \left[\omega_0^2 + \frac{\gamma}{2} \omega' \sin\{2(\omega't + \phi)\} + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \cos\{2(\omega't + \phi)\} \right] \\ &= E_0 e^{-\gamma t} \left[1 + \frac{\gamma \omega'}{2\omega_0^2} \sin[2(\omega't + \phi)] + \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2 \cos[2(\omega't + \phi)] \right] \end{aligned}$$

NOTAR ϕ' oscila con $2\omega'$, lo ϕ' es lógico, ya ϕ' es número de γ es máximo 2 veces en ϕ' ciclo

El concepto de seno y coseno se repite cada

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \text{ lo llamamos } f(t)$$

Es particular
se repite cada
 $\frac{T}{2}$, pero nos
interesa considerar
con la frecuencia

$$\Rightarrow E_T(t) = E_0 e^{-\gamma t} f(t)$$

Calculamos cuánta energía se pierde en 1 ciclo

$$E_T(t) - E_T(t+T) = E_0 f(t) \left(e^{-\gamma t} - e^{-\gamma t} e^{-\gamma T} \right)$$

↓
Sigue fct.
común

$$= E_0 f(t) e^{-\gamma t} (1 - e^{-\gamma T}) = E_T(T) (1 - e^{-\gamma T})$$

Supongamos q' la disipación es relativamente baja entonces

considera ~~que se ven~~ ondas cuántas osc. ($\gamma \ll 1$)

$\Rightarrow$ Podemos usar el desarrollo en serie de Taylor de e^x en $x=0$

$$\rightarrow e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} \dots$$

$$\text{A } 1^{\text{er}} \text{ orden} \rightarrow e^{-\gamma T} \approx 1 - \gamma T \Rightarrow 1 - e^{-\gamma T} \approx \gamma T$$

$$\Rightarrow \Delta E_T \approx E_T \cdot \gamma \cdot T = \left(\frac{2\pi\gamma}{\omega} \right) E_T \equiv \frac{2\pi}{Q} E_T$$

$Q \equiv$ Factor de mérito
o de calidad

Indica en cuántas oscilaciones se osc. pierde una fracción considerable
de su energía (cuanto más grande, menos pérdidas)

$\Rightarrow$ más "ideal"