OSCILADOR ARMÓNICO FORZADO

Hasta aquí estudiamos al oscilador al ser apartado del equilibrio y dejándolo evolucionar.

Veamos q' ocurre si además consideramos q' $\exists$ una fuerza externa aplicada. Está claro q' al quitar la F, el sistema evolucionará igual q' antes.

La ecuación dinámica para un resorte sería

$$M\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t)$$

y para un péndulo

$$Ml\ddot{\theta} = -Mgl\theta - \Gamma l\dot{\theta} + F(t)$$

ó

$$M\ddot{\theta} = -Mg\theta - \frac{\Gamma}{l}\dot{\theta} + \frac{F(t)}{l}$$

Vemos q' ambas tienen la forma

$$\ddot{\psi} + \omega_0^2\psi + \gamma\dot{\psi} = a(t) \longrightarrow \text{ac. encaminada}$$

(en el caso del péndulo es angular)

Pero entonces es $\frac{F(t)}{ml}$

- Vamos a analizar mentalmente q' esperamos qué ocurra si aplicamos una F(t) periódica en el t:

El sistema tiene una frec. "natural", si le pegamos un golpe, lo estiramos y lo soltamos, etc, tenderá a oscilar a esa frecuencia.

¿Qué ocurriría si aplicamos una F(t) a una frecuencia mucho menor?

Está claro q' las características de este mov. serán parecidas al caso estático, instante a instante el sistema sigue a la fuerza aplicada.

Es como si lo colocara en esa posic. y no lo soltara

Si, por el contrario, usamos una frec. mucho mayor que la propia, es esperable que el sistema tenga alguna inercia y no responda instantáneamente.

$\Rightarrow$ El mov. irá un poco retrasado respecto de la fuerza

Notar que si excitamos al oscilador a la frec. propia,

va a ocurrir en algún momento que la $F(t)$ cancele a la F disipativa

A ver: Si oscila sin $F(t)$ $\Rightarrow$ la disipación va como la $\vec{v}$

y ésta varía sinusoidalmente con la frec. propia.

Si $F(t)$ es sinusoidal, en alguna amplitud cancelará a la F disipativa

(si está en la fase correcta) $\longrightarrow$ ⊛ 25' ATRÁS

~~Esto~~ si $\vec{F}(t)$ va en el mismo sentido q' $\vec{v}$ ($\vec{v}$ y $\vec{F}$ en fase)

En ese caso el mov. es como un osc. libre.
Notar q' esto sólo puede ocurrir a la frec. propia del sistema.

Pero vamos al problema dinámico:

1º notemos q' la soluc. completa del problema forzado tiene que incluir a la soluc. homogénea vista previamente, esto puede verse de forma sencilla:

Sup. ψ_P solución del problema con $F(t)$ y ψ_H soluc. del probl. sin $F(t)$ $\longrightarrow$ homogénea (ec. dif. igualada a cero)

Entonces

$$\ddot{\psi}_H + \omega_0^2 \psi_H + \gamma \dot{\psi}_H = 0$$

y

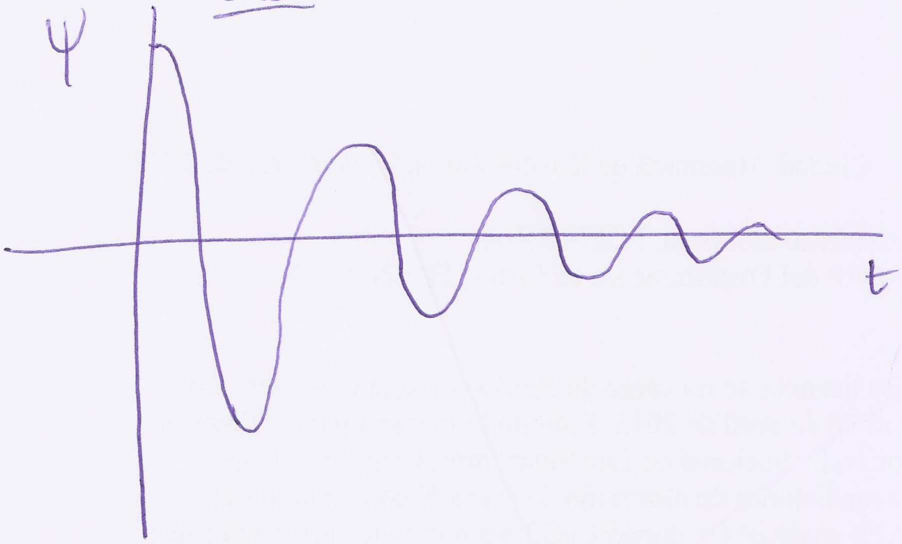
$$\ddot{\psi}_P + \omega_0^2 \psi_P + \gamma \dot{\psi}_P = \frac{F(t)}{m} = a(t)$$

(Recordar q' p/el péndulo hay un "l" dividiendo)

$$\Rightarrow \quad (\ddot{\psi}_H + \ddot{\psi}_P) + \omega_0^2 (\psi_H + \psi_P) + \gamma (\dot{\psi}_H + \dot{\psi}_P) = a(t)$$

$\Rightarrow$ $\psi_H + \psi_P$ es solución de la ecuación con $F(t)$.

CASO:



/ SIN F

~~[illegible]~~ SI F TIENE = FREC. Q' LA NAT. Y TIENE LA AMPLITUD CORRECTA, PUEDE OCURRIR QUE F CANCELE ~~[illegible]~~ EXACTAMENTE A $-\gamma v$

SI ~~A~~ AMPLITUD DE F ES MENOR Q' LA $|\gamma \dot{\psi}|$ INICIAL ESTO OCURRIRÁ SI LA F ESTÁ EN FASE CON $\vec{v}$ EN ALGÚN MOMENTO.

A PARTIR DE AHÍ, SIN DISIPACIÓN, LA AMPLITUD YA NO DECRECE Y SI LA F. SIGUE MANTENIENDO SU FREC. DE FASE CON $\vec{v}$ SIEMPRE VA A CANCELAR A LA F. DE AMORTIGUAMIENTO $\longrightarrow$ EL MOV. MANTENDRÁ SU AMPLITUD INCLUSO CON DISIPACIÓN

$\longrightarrow$ NOTAR QUE ESTO SÓLO PUEDE OCURRIR A LA FRECUENCIA NATURAL Ó PROPIA DEL SISTEMA

En gral., la forma de ψ_p depende de la forma funcional de la fuerza

Vamos a analizar el caso en que $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$

¿x q? $\longrightarrow$ 1) En muchos casos, los sistemas físicos son excitados por pert. armónicas para estudiar su respuesta en frecuencia $\longrightarrow$ espectroscopía

Objetivo: estudiar absorción de energía y asoc. con el sist. a nivel microscópico

2) Cualquier forma funcional de interés puede expresarse como superposición de oscilaciones armónicas de $\neq$ frecuencia (desarrollo de Fourier) $\Rightarrow$ dado q' la ec. diferencial es lineal, si resolvemos para una $F_1(t)$ y obt. ψ_{p1} y para una $F_2(t)$ obt. ψ_{p2}, etc. la solución para $F(t) = \sum F_i(t)$ será $\sum_i \psi_{pi}$ Superposición

Volvemos a plantear el problema usando notación de n° complejos. Proponemos q' la solución particular es:

$$\psi_p = C e^{i\omega t} \quad (\omega = \text{frec. q' } a(t)) \quad (\omega' \equiv \omega)$$

Reemplazando en la ecuación forzada obtenemos

$$\ddot{\psi}_p + \omega_0^2 \psi_p + \gamma \dot{\psi}_p = a(t)$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma) C = a_0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{a_0}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} =$$

MULT. Y DIVID. POR C^* PARA Q' EL DENOMINADOR QUEDE REAL

$$\overset{\uparrow}{=} \frac{a_0\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ NOS QUEDAMOS CON LA PARTE REAL DE $Ce^{i\omega t}$

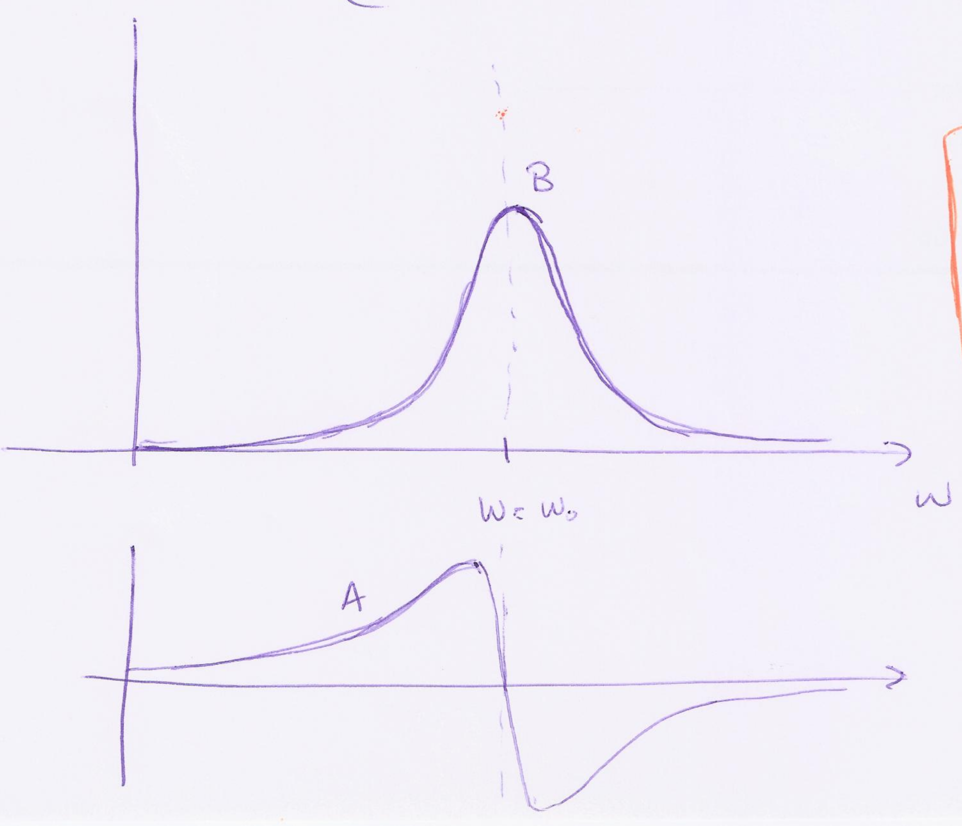
Y SE OBTIENE (VERIFICAR EXPANDIENDO $\underset{(A-iB)}{\underset{\parallel}{C}} \cdot (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t)$):

$$\psi_p = A \cos(\omega t) + B \operatorname{sen}(\omega t)$$

CON
$$A = \frac{a_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = A_{\text{elástica}}$$

$$B = \frac{a_0\,\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = A_{\text{absorbente}}$$

OJO Q' CRAWFORD LAS LLAMA AL REVÉS



CONSULTAR HASTA PÁG. 29 EN PIZARRÓN.

SE LLAMA ASÍ PORQUE ES LA ÚNICA QUE CONTRIBUYE A LA POTENCIA MEDIA CONSUMIDA POR EL OSC. QUE ES:

$$P(t) = F(t)\cdot\dot{\psi}$$

CRAWFORD CAP. 3 SECC. 3.2

- Notar q' ahora la dif. entre seno y coseno es importante pues la relac. entre las fases de $\vec{F}_y$ $\vec{a}$ depende de ellas
- Vemos tb. q' en ψ_p no hay ctes de integración, ambas se encuentran en ψ_H.
- Si bien $\psi = \psi_H + \psi_p$, ψ_H decae con un factor $Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}$

con lo que en un $t = \tau = \frac{2}{\gamma}$ (el 2 es arbitrario), $A(t)$ decae a

$\frac{A_0}{e}$ (por poner un factor) $\approx \frac{A_0}{3}$ $\Rightarrow$ lo llamamos $\tau = t$ caract.

Eso quiere decir q' para $t \gg \tau$ $\psi \approx \psi_p$ y la parte homogénea nos deja de importar $\Rightarrow$ el sist. sólo oscila a la frec. de la fuerza aplicada. (ver fig. 1.6.2 → Martínez)

$\psi_p \longrightarrow$ estado estacionario a diferencia de $\psi_H + \psi_p$ que es el transitorio. El estado estacionario es la solución a t largos, el sistema se dice que "pierde memoria" y domina la fuerza.

Recordemos q' A está en fase con $a(t)$, mientras q' B se encuentra a 90° (en cuadratura), veamos cuál es su cociente

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega\gamma}{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}$$

Para $|\omega_0 - \omega| \gg \gamma$ (lejos del pico de B)

$$\left|\frac{B}{A}\right| = \frac{\omega}{\omega_0 + \omega} \cdot \frac{\gamma}{|\omega_0 - \omega|} \ll 1 \Rightarrow \boxed{|B| \ll |A| \text{ domina la comp. en fase}}$$

Esto significa:

i) $\Rightarrow$ Para $\omega < \omega_0$ $\quad A > 0$ y el oscilador sigue a la fuerza.

ii) Por ej. $\omega = 0 \longrightarrow A = \dfrac{a_0}{\omega_0^2} \longrightarrow$ solución estática

$$B = 0$$

la solución sigue exactamente a $F(t)$ $\quad (\omega = 0)$

$\Rightarrow$ Para $\omega \ll \omega_0$ $\quad A \approx \dfrac{a_0}{\omega_0^2}$ $(B \approx 0)$ y el movimiento sigue a la fuerza de forma cuasiestática $\longrightarrow$ $\psi \simeq \left(\dfrac{a_0}{\omega_0^2}\right) \cos \omega t$ izq

En cambio si $\omega \gg \omega_0$ $\quad A$ se hace negativo y el mov. es en contrafase con la fuerza $\left(B \to 0 \text{ pues el denom. es } \propto \omega^2 \text{ y el num. } \propto \omega\right)$ der

Justo en $\omega = \omega_0$ $\quad A = 0$ y el mov. queda exactamente en cuadratura con $B = \dfrac{a_0}{\omega_0 \gamma}$

$$\Rightarrow \quad \psi_0 = \frac{a_0}{\omega_0 \gamma} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$\dot{\psi} = \frac{a_0}{\gamma} \cos(\omega_0 t)$$

con lo que queda $\quad \underbrace{\gamma \dot{\psi}}_{\text{F. disipativa}} = \underbrace{a(t)}_{\text{forzante}}$

Como vimos, la F. disipativa y la forzante se ~~contrarrestan~~ compensan a cada t y el W de $F(t)$ se aprovecha al máximo para sostener el movimiento.

Resonancia

Analicemos la potencia entregada por la $F(t)$

En términos de la fuerza, la potencia se define como $P = F \cdot v$

En este caso $v \propto \dot{\psi}$ y $F \propto a$

$$\Rightarrow P \propto a\dot{\psi} = a_0 \omega \cos(\omega t) \cdot \left[-A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)\right]$$

Donde la coordenada generalizada servirá p/ determinar la cte de proporcionalidad

En el caso del péndulo:

$$\left.\begin{array}{l} F = m l_0 a \\ v = l_0 \dot{\psi} \end{array}\right\} \Rightarrow P = m l_0^2 a \dot{\psi}$$

Recordar q' a es una aceleración generalizada, ~~generada por el resorte~~

que surge de

$$\ddot{\psi} + \gamma \dot{\psi} + \omega_0^2 \psi = a(t)$$

Si $\psi \equiv x \Rightarrow a(t)$ es ~~[illegible]~~ (resorte) $= \frac{F_0}{m}$

Pero si $\psi \equiv \theta$ (péndulo) $\Rightarrow a(t)$ es la $\frac{~~[illegible]~~ \text{Fza/masa}}{l_0 \text{ — long. del péndulo}}$

Para el resorte vale la igualdad

Resorte $\Rightarrow P \propto \frac{F_0}{m}\omega \left[B \cos^2(\omega t) - \frac{A}{2} \operatorname{sen}(2\omega t)\right]$

Proviene del mov. en que v y F están en fase $\Rightarrow$ No cambia de signo

Oscila 2 veces en $T = \frac{2\pi}{\omega}$, a veces es positivo (F realiza trabajo sobre el sistema) y a veces negativo (el sistema trabaja sobre el exterior).

Sigamos con el resorte

Calculemos la potencia media entregada en un ciclo

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+T/2} P(t')\,dt'$$

Es fácil ver q' el término con sen $(2\omega t)$ realiza 2 oscilaciones completas, siendo positivo y negativo en tiempos iguales, con lo que su integral en un período se anula

Por otro lado, el sumando que posee el $\cos^2(\omega t)$:

$\cos^2(\omega t)$ es siempre positivo, va entre 0 y 1 de forma simétrica, entonces su promedio es $\frac{1}{2}$ (hagan las cuentas), con lo que (usando el valor que obt. antes P/B — por ahí explicar en pizarrón).

$$\cancel{\langle P\rangle = \omega B = \frac{Q_0\,\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}}$$

~~Si llamamos P_0 al máximo (en $\omega=\omega_0$)~~

$$\cancel{\Rightarrow \langle P\rangle = \frac{P_0\,\omega^2\gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{F_0}{m}\,\omega\,\frac{B}{2}$$

Como dijimos, la pot. abs. por el osc. sólo dep. de esta amplitud

B ya lo obtuvimos → amplitud absorbente

en el caso del resorte $\left(a_0 = \frac{F_0}{m}\right)$

$$B = \frac{F_0}{m}\,\frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}$$

En resonancia $\langle P \rangle = P_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{\cancel{\omega_0^2}\,\gamma}{\cancel{\omega_0^2}\,\gamma^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P \rangle(\omega) = P_0\,\frac{\omega^2\gamma^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\gamma)^2}}$$

(Esta ecuación es igual para el péndulo con $P_0 = \frac{m\,l_0^2\,a_0^2}{2\gamma}$)

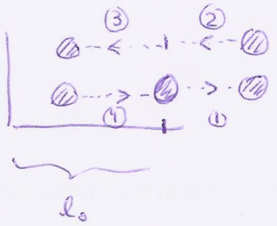
5/4/2013

Analicemos la expresión:

~~1º Dado q' la P es energía x unid. de t, no es~~

A baja frecuencia el oscilador es "empujado" por la F_{ext} en la mitad del ciclo y "frenado" en la otra mitad

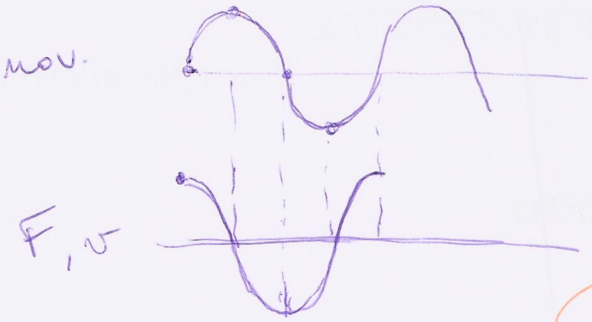
Ej. resorte



A baja frec. el resorte hace fza contraria a F_{ext} en ① y en ③ y a favor del resorte en ② y en ④

⇒ El trabajo decrece al bajar la frec., en part. para $\omega = 0$ la potencia transferida y por lo tanto el trabajo, valen cero.

Para $\omega = \omega_0$ vimos que la fuerza ext. está en cuadratura con el movimiento (en fase con v)



_ el sistema siempre es empujado por la fuerza

→ la fuerza "va igual" q' la velocidad

⇒ la transf. de potencia es máxima
energía

⇒ la amplitud de mov. también

Esto es lo q' se conoce como resonancia

Al aumentar la frec. $\langle P \rangle$ tiende otra vez a cero.

5/4/2013
↓

El ancho de la curva de resonancia nos dirá en q' rango de frecuencias la transm. de potencia es apreciable.

Para esto definimos los puntos en q' la potencia se reduce a la mitad de su máximo P_0 y buscamos $\omega_{1,2}$ q' cumplan esto

$$\langle P \rangle = \frac{P_0\, \omega^2 \gamma^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2} = \frac{P_0}{2}$$

$$\Rightarrow \quad (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = (\omega\gamma)^2$$

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm\, \omega\gamma$$

$$\longrightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 \pm \omega\gamma$$

No resolver sin clase, ir hasta ⊕ pág. 56

opción 1 $\omega^2 - \omega\gamma - \omega_0^2 = 0$

op. 2 $\omega^2 + \omega\gamma - \omega_0^2 = 0$

op. 1

$$\omega^1_{a,b} = \frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2 + 4\omega_0^2}{4}}$$

op 2

$$\omega^2_{a,b} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2 + 4\omega_0^2}{4}}$$

De op. 1 $\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2} > \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \omega_1 = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2}$

De op. 2 misma razón $\Rightarrow \omega_2 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2}$

Me quedo con las raíces positivas

$$\Rightarrow \boxed{\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \pm \frac{\gamma}{2}} \quad \oplus$$

y $\boxed{\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \gamma}$

Recordamos que dado que la energía del oscilador amort. va como $e^{-\gamma t}$ decíamos que en un $\tau \sim \frac{1}{\gamma}$ la energía decae a $\frac{1}{e}$ de su valor inicial, con esto definimos $\tau = \frac{1}{\gamma}$ como el tiempo de decaimiento del oscilador o t característico

Así vemos que $\Delta\omega = \frac{1}{\tau}$

Hemos llegado a una relación de gran importancia y que aparece en numerosas oportunidades en física

$$\rightarrow \quad \tau \cdot \Delta\omega = 1$$

Analizar $\Delta\omega$ chico $\rightarrow \tau \gg 1$
$\Delta\omega$ grande $\rightarrow \tau \ll 1$

el producto del ancho de la curva de resonancia y el tiempo de decaimiento del sistema es un número "del orden" de 1

(Recordar la arbitrariedad de definir el t en el cual decrece a $\frac{1}{e}$)

↳ el prod. es finito

Notar que si uno es capaz de hacer una medición de energía absorbida variando ω y a amplitud cte, el máximo nos dice cuál es la frec. propia del sistema y el ancho nos da información sobre γ que es la disipación. Esto puede hacerse sin una observación siguiendo la evolución temporal, ni tampoco las cond. iniciales.

Un exp. como este es la base de las experiencias de espectroscopía.

No 2013 →

Osciladores con baja disipación / alto Q

(Si hay t, si no remitir a Martínez secc. 1.8.)

Una forma de decir esto es $\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \ll \omega_0^2$

Veamos cómo es la curva cerca del máximo, o sea $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$

El denominador que apareció en todos lados $(A, B, \langle P \rangle)$

es $D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\gamma)^2 =$

$$= (\omega_0 + \omega)^2 (\omega_0 - \omega)^2 + (\omega\gamma)^2$$

Puede escribirse de forma aproximada.

$\Rightarrow$ REEMP. $\omega_0+\omega$ POR $2\omega_0$ y $\gamma\omega$ POR $\gamma\omega_0$ $\Big\}$ CERCA DE PICO

~~$|\omega-\omega_0| << \omega_0$ significa~~

CONSERVO EL $\omega_0-\omega$ PUES SÓLO PUEDO DECIR Q' ES PEQUEÑO, SIN EMBARGO, EN EL DENOMINADOR, SU VARIACIÓN ORIGINARÍA UN CAMBIO GRANDE.

$$\Rightarrow D(\omega) \approx 4\omega_0^2 (\omega_0-\omega)^2 + (\gamma\omega_0)^2 =$$

$$= 4\omega_0^2\left[(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{D(\omega)} = \frac{1}{4\omega_0^2\left[(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]}$$

EL MÁX. DE ESTO (EN ω_0), DA $\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\omega_0^2\gamma^2} = \frac{1}{\omega_0^2\gamma^2}$

$$\Rightarrow \text{DEF.} \quad \boxed{R(\omega) = \frac{\cancel{\omega_0^2}\gamma^2}{4\cancel{\omega_0^2}\left[(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} = \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\left[(\omega_0-\omega)^2+\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]}}$$

CURVA DE RESONANCIA, RESPONDE A UNA LORENTZIANA

DIFIERE LEVEMENTE DE LA CURVA REAL (VER PÁG. 29 LIBRO MARTÍNEZ P/ CASOS ESPECÍFICOS) Y ES SIMÉTRICA RESP. DE ω_0.

RECORDAR Q' ESTO ES P/ $\omega \approx \omega_0$