

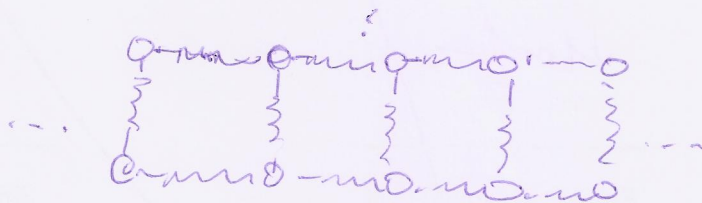
Oscilaciones en sistemas con 2 G.L.B.

ya vimos (de int. al ppio de superposición) un sistema con 2 G.L. $\rightarrow$ el péndulo cónico.

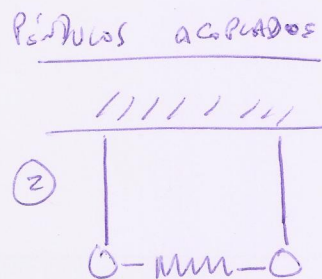
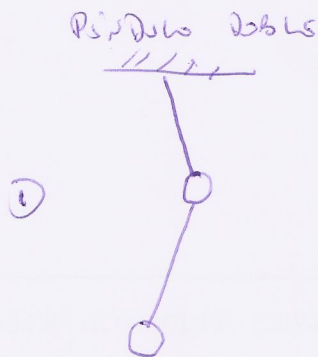
Éste es un caso extremadamente simple en el cual las ecuaciones de C/dimensión no se acoplan con el otro G.L. de libertad. Hay muchos EJ en la Nat. de fís. con 2 gl, muchos de ellos requieren conoc. de física avanzada: vibraciones de moléculas y sólidos, part. elementales. Otros involucran acoplamiento de circuitos el. y serán vistos en F3 $\rightarrow$ circuitos de corriente alterna con C. e induct. circuitos resonantes.



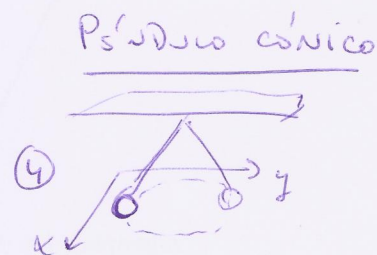
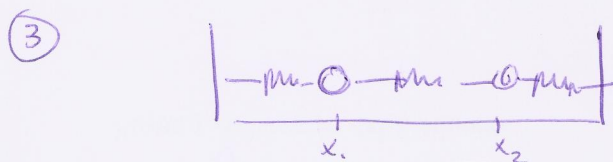
los más simples (que estudiamos aquí) involucran péndulos y resortes, pero la fenomenología es totalmente análoga a problemas + complicados, es así que una molécula de 2 ^{o más} átomos puede verse como 2 partículas interactuando a través de una especie de resortes, o un sólido como muchas bolitas conectadas por resortes



el resorte representa la interacción atractiva q' siente los átomos, esto es válido dentro de cierto aprox. y a que las moléculas y los sólidos son estables, con lo que indica que los unen F. RESTITUTIVAS



Los muelles unidos a estacion y a una pared.



Se necesitan 2 ^{variables} ~~coordenadas~~ p/ definir la configuración de mov. en sistema.

①, ② Ángulo de C/punto con la ~~vertical~~ vertical

③ x_1 y x_2

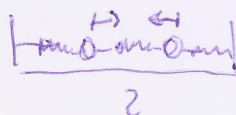
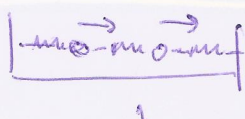
④ ~~coordenadas~~ desplaz. en x y desplaz. en y .

El mov. general de un sist. con 2 G.L. puede ser complicado (ninguna parte se mueve con mov. armónico simple)

Para valores q' con 2 G.L.B. y ec. lineales el mov. siempre es la superposición de 2 mov. arm. simples simultáneos

→ Se conocen como modos normales

Si elegimos adecuadamente las cond. iniciales podemos hacer oscilar el sistema en uno u otro sin q' estos se mezclen intuitivamente.



Podemos ser los modos normales.

Sin embargo hay que verificar que esto es así.

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS MODOS.

CUANDO EL SISTEMA OSCILA EN UN MODO CADA PARTE DEL SISTEMA REALIZA UN MOV. ARMÓNICO SIMPLE A LA MISMA FRECUENCIA (FREQ. DEL MODO)

TODAS LAS PARTES PASAN SIMULTANEAMENTE POR SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO. (PSE)

Esto quiere decir que NUNCA PODRÁN APLICAR EN UN MISMO MODO

$A \cos \omega_1 t$ y $B \sin(\omega_2 t)$ PUES NO SE AMPLIFICAN AL MISMO t

NÍ TAMPOCO $A \cos(\omega_1 t)$ y $B \cos(\omega_2 t)$

($\psi_a \equiv \text{coord. masa 1}$, $\psi_b \equiv \text{coord. masa 2}$)

Demostremos que, si usamos ψ_a y ψ_b a las PARTES MÓVILES

DE NUESTRO SIST. CON 2 GR. DE LIB. $\Rightarrow$ ESTAR RESPONDIENDO, PARA UNO

DE LOS MODOS (el 1): (esto quiere decir que el sistema está en el modo 1)

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = \frac{B_1}{A_1} \psi_a(t)$$

CON LA MISMA FREQ. y FRECUENCIA PARA AMBOS GRADOS DE LIB.

(O PARTES MÓVILES)

DE LA MISMA FORMA, PARA EL MODO 2:

$$\psi_a = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\psi_b = B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{B_2}{A_2} \psi_a$$

CADA MODO TIENE SU FREQ. y SU ϕ_i , TAMBIÉN SU "FORMA" DADA POR EL

COCIENTE DE B_i/A_i . NOTAR Q' PUEDE HABER UN DIFERENCIAL EN π (SIGNO DE B_i/A_i)

Vamos a ver el mov. + anal. de un sist. con 2 G.L. & poder escribir como

podría ser $x_1 \leftarrow \psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$
podría ser $x_2 \leftarrow \psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ } invariantes but could.

Péndulo cónico

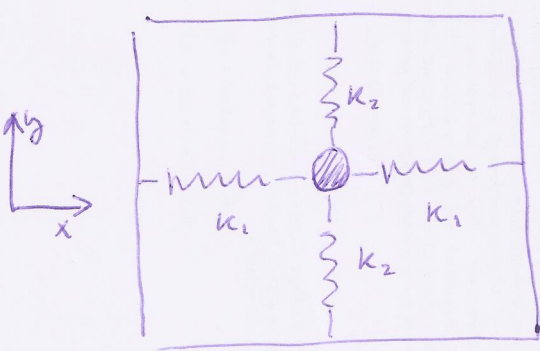
es el etendo + simple, los 2 movs tienen la misma frecuencia (degeneración) por el ser osc. del mismo péndulo en x y en y ,

respectivamente. $\rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$

ya vimos que (si péndulo en $x \rightarrow$ ec. x ; si pénd. en y idem y no están acoplados)
 $\psi_a(t) \equiv x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$
 $\psi_b(t) \equiv y(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$ en part. $\omega_1 \equiv \omega_2 !!$

Sistema mecánico bidimensional (1º GENERA) $\rightarrow$ P/43 PRIMERO

Suc. este problema con 2 resortes idénticos



constante k_1 en x y 2 idénticos
de k_2 en y

Vamos a resolver por oscilaciones, lo que implica que despreciamos términos de orden cuadrático en x e y $\left(\frac{x^2}{a^2}, \frac{y^2}{a^2}, \frac{xy}{a^2} \right)$, siendo a la posición de equilibrio de ambos resortes, no nec. el lo)

VAMOS CON LOS EJEMPLOS x e y de las FZS.

(41)

DE LOS RESORTES:

- 1) SUP. Q' SEPARA A M EN LA DIRECCIÓN $+x$, LA FZS DE RETORNO SERÁ

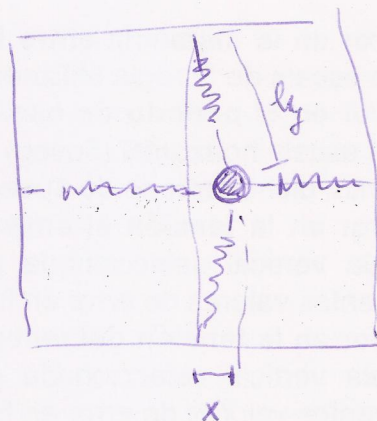
$$F_x = -2K_1 x$$

RECORDAR Q' ES COMO RESORTE EN ~~SERIE~~ PARALELO

$$F_y = 0$$

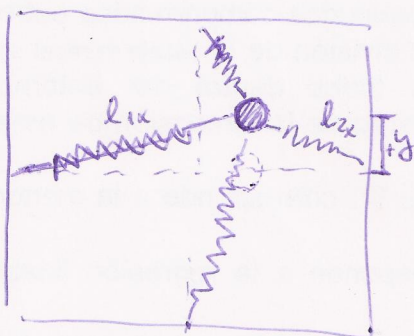
NOTAR Q' LA FUERZA EN x DADA POR LOS RESORTES VERTICALES ES $\propto l_y$ ~~DEBIDO A QUE~~

$$l_y^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow \frac{l_y^2}{a^2} = \frac{x^2}{a^2} + 1 \approx 1$$



- 2) POSTERIORMENTE APLICO OTRO EJEMPLO EN y (USO DEL ANTERIOR)

EN LA DIRECCIÓN $+y$



LOS RESORTES "X" CAMBIAN SU LONGITUD

~~DE~~

DE $a+x$ Y $a-x$

EN LA l_{1x} Y l_{2x}

$$\text{CON } l_{1x}^2 = (a+x)^2 + y^2$$

$$l_{2x}^2 = (a-x)^2 + y^2$$

SI DIVIDIMOS POR $a^2 \Rightarrow \frac{l_{1x}^2}{a^2} = \frac{(a+x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$

NO SEPARA x FUENTE A a (SI SEPARA x^2 FUENTE A a^2 , PERO EL CAMBIO ESTA FUENTE DEL PRESENTE)

SI SEPARA $\frac{y^2}{a^2}$ EN AMBOS CASOS, CON LO Q' ES ~~ESTÁ~~ ~~EL~~ ~~EFECTO~~ DE

LOS "RESORTES X" SON DESPRECIO AL DESPLAZAR LA FUERZA EN y .

llegamos entonces a 2 ec. independientes:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -2k_1 x \quad \text{y} \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} = -2k_2 y$$

Cuyas soluciones ya conocemos:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad ; \quad \omega_1^2 = \frac{2k_1}{M}$$

$$y(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad ; \quad \omega_2^2 = \frac{2k_2}{M}$$

Lo que vemos es que hay un "modo x" y un "modo y"

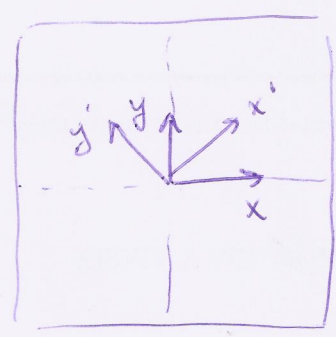
~~que~~ cuyas las de interacción dependen sólo de las cond. inic. en cada coordenada.

Vemos que las oscilaciones $x(t)$ y $y(t)$ parecen moverse independientemente que la expresión completa de las coordenadas en función de los modos normales.

Eso se debe a las "fortuna" (suertes) en la elección de las coordenadas, lo cual no ocurre a un sistema descrito en las oscilaciones, cada una correspondiente a un solo modo normal.

$$\varphi_a \equiv x \quad \text{que es tal manera que} \quad A_2 \equiv 0 \quad \text{y} \quad \varphi_b \equiv y \quad \text{y} \quad B_1 = 0$$

A estas coordenadas, en las que los modos se describen se les conoce como Coordenadas Normales (se igual a lo visto en el capítulo cónico)



Sol. q' hubiésemos x' y y'
 $\Rightarrow$ la coord. x y y son comb.
independientes x' y y' con lo que
las funciones en x' y y' hubiésemos

cuando fuéramos acopladas.

En los probl. de 2 G. lib. No siempre es tan fácil hacer las coord.
Normales por simple "inspección". Por eso las ec. suelen quedar
acopladas. lo q' hay q' hacer ^{o, si es esto} es encontrar ~~las~~ combinaciones independientes
de las coordenadas, en las cuales las ec. queden desacopladas. coord. Normales

En el caso $x', y' \rightarrow x, y$ se debe pasar el sist. de coord.

Para obt. x, y .

Forma Sistemática de hacer los modos

(lineales/homogéneos)

Supongamos que tenemos un sist. de ecuaciones y un sist. de
coord. "No Normales" $\rightarrow$ lo q' Crawford llama "modo".

$\Rightarrow$ las coord. Estandar acopladas, en total:

$$\frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -a_{11} \psi_a - a_{12} \psi_b$$

$$\frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -a_{21} \psi_a - a_{22} \psi_b$$

Usamos x y y ,
pero el proc. es
igual para cualquiera
par de coordenadas
~~o sea~~
"pares móviles"

a_{ij} depende del problema dinámico particular, alguno(s) par(es)

son nulos

$\psi_a \equiv x$ $\psi_b \equiv y \rightarrow$ coord con estas, modos norm. corresponden

Supongamos q' el sistema oscila en un modo Normal

Unos q' esto significa que todas las partes del sistema oscilan a la misma frecuencia (la de modo normal), entonces, como x e y no

son coord. Normales ^(en gen.) Ambas oscilan a la misma frec. (digamos ω)
y fase ^{coherentes}

→ $\psi_a = A \cos(\omega t + \varphi)$; $\psi_b = B \cos(\omega t + \varphi)$

con ω y $\frac{B}{A}$ desconocidos por ahora. → Signo de $\frac{B}{A}$ permite distinguir en π

Esto significa q' en ese modo Normal, se cumple que

$\frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -\omega^2 \psi_a$ y $\frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -\omega^2 \psi_b$

Juntamos estas ec. con las propuestas antes usamos a

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2) \psi_a + a_{12} \psi_b = 0 \\ a_{21} \psi_a + (a_{22} - \omega^2) \psi_b = 0 \end{cases}$$
 ① No ~~borramos~~
 ~~las~~ ^{estas} ~~las~~ ^{las} sig sig

Problemas

Combinado → Esto se conoce como una ecuación de autovalores

Notar que si lo escribimos convenientemente distinto:

$a_{11} \psi_a + a_{12} \psi_b = \omega^2 \psi_a$

$a_{21} \psi_a + a_{22} \psi_b = \omega^2 \psi_b$

QUE EN FORMA MATRICIAL ES

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = 0$$

→ las soluciones de esta ec. matricial dan los valores (autovalores) de ω^2 y los pares $(\psi_a(t), \psi_b(t))$ (autovectores) correspondientes. como parámetros

esto se puede resolver de varias formas, una es dividir $\frac{\psi_b}{\psi_a}$

de ambas ec. e igualar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\psi_b}{\psi_a} &= \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \\ \frac{\psi_b}{\psi_a} &= \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}$$

queda una ecuación para ω^2 , cuadrática en (ω^2)

$$(\omega^2 - a_{11})(\omega^2 - a_{22}) - a_{12} a_{21} = 0$$

esto no es ni más ni menos que decir que si tengo ①, la solución $\neq (\psi_a, \psi_b) = (0, 0) \rightarrow$ (la triviale, q' siempre existe en un sist. homogéneo) es la que corresponde a q' el determinante de la matriz sea igual a cero (no tal q' los términos con ω^2 los parámetros están ambos mult. por (-1, no cambia).

De esa ec. surgen 2 valores para $\omega^2 \rightarrow \omega_i^2$:
 $\begin{cases} > 0 \\ \text{well} \end{cases} \rightarrow \omega_2^2$

Como sabemos q' es sistema oscilaba en 1 solo modo

$\Rightarrow \omega_1$ debe ser la freq. de modo 1 y ω_2 es de modo 2.

¿cómo usar el mov. de los modos? Resp. ω^2 por ω_i^2

en las ec. y reordenando, encontramos la combinación de ψ_a y ψ_b que corresponde al modo i: (Como $\psi \propto \psi_a$ en modo)

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{modo 1}} = \left(\frac{y}{x} \right)_{\text{modo 1}} = \left(\frac{B}{A} \right)_{\text{modo 1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

(Ambos en fase y igual ω) $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}{A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{modo 2}} = \left(\frac{y}{x} \right)_{\text{modo 2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{a_{21}}{\omega_2^2 - a_{22}}$$

Donde (A_1, B_1) son los coeficientes de los modos de libertad de las partes móviles

(ψ_a, ψ_b) respectivamente, proyectados en la base de la coordenada

Normal $\psi_1(t)$ (corresp. al modo 1) $\rightarrow \psi_1(t) \propto \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

Simil. (A_2, B_2) son los coef. de los modos de lib. (x, y) respect,

en la base de la coord. normal $\psi_2(t)$ (corresp. al modo 2)

Notar q' sólo importa el cociente $\frac{B_i}{A_i}$ $\psi_2(t) \propto \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$
 x_1 y x_2 son comb. lin. de x y y

O sea: si quiero escribir $x(t)$ en 2 coord normales:

$$\psi_a(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

φ_1 y φ_2 están dadas por las condiciones iniciales, no tenemos libertad de elección ya que en este modo el mov. de todo el sistema está en fase.

Por otro lado, la única condición sobre A_1, A_2, B_1 y B_2 es

Sobre los cocientes $\frac{B_1}{A_1}$ y $\frac{B_2}{A_2} \Rightarrow$ ~~A_1 y A_2~~

También surgen de las cond. iniciales y usando esos cocientes obtenemos B_1 y B_2

¿cuáles son las 4 ec. de C. i. para obtener $A_1, \varphi_1, A_2, \varphi_2$?

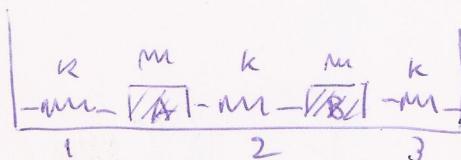
$$\psi_a(0), \psi_b(0), \dot{\psi}_a(0), \dot{\psi}_b(0)$$

Con esto nuestra solución se escribe como superposición de los modos 1 y 2.

Oscilac. de 2 masas acopladas (Por método de la energía)

(48)

2 masas idénticas, conectadas por 3 resortes equivalentes
de la sig forma:



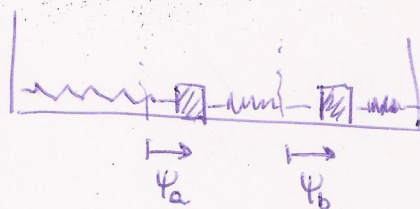
Vamos a intentar resolverlo por inspección, el probl.
formulase de la misma manera (P8-Guías Darso).

Como hay 2 gr. de lib. debe haber 2 modos. En c/modo, φ es
harmonico (c/mas) oscila con igual frecuencia en mov. armónico.

$$\text{modo } \varphi' \quad \omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{F_{EA}}{\text{masa desplazamiento}}$$

Como las masas son =, tenemos que buscar configuraciones
en las que φ' es la fuerza de retorno sea igual p/ambas masas.
desplaz.

~~Como~~ En el caso de la resorte, sabemos que la FEA de c/m depende
de la elongación, entonces si desplazamos a ambas masas en la
misma dirección, la misma cantidad, sabemos que el cociente $\frac{F}{\text{despl}}$
mantiene.



El resorte central no hace FEA,
el 1 hace F negativo sobre la masa A
que se desplaza φ_a (positivo), y el
resorte 3 hace F negativa sobre la masa B
que se desplaza φ_b .

Es fácil ver φ' si $\varphi_a = \varphi_b$, ambas masas ~~se desplazan~~ tienen igual
valor de $\frac{F}{\text{despl.}}$, o sea φ' se mueven a la misma frecuencia $\Rightarrow$ Tenemos el 1º modo

Modo 1 $\rightarrow \psi_a = \psi_b$ y $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$

mostrado
suficientemente
el mov.

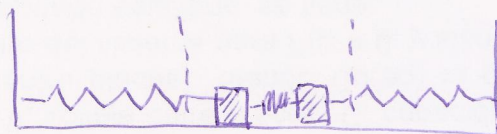
(49)

Notar q' es como si el resorte central no existiera.

Para el 2º modo notamos q' también se puede obtener que el cociente $\frac{F_{2a}}{F_{2b}}$ es igual p/ambas masas si estas se desplazan en sentidos contrarios, si ψ_a es más a la derecha y ψ_b a la izquierda, hay q' buscar el punto en que ambos estén en la misma frecuencia.

Si $\psi_a = -\psi_b \Rightarrow$ los módulos de las FBA son = y entonces (pero el signo contrario)

la frecuencia de oscilación es la misma para ambas, veamoslo.



ψ_a

$\psi_b = \psi_a$

Modo 2

masa A) $F = -k_1 \psi_a - k_2 \psi_a - k_2 \psi_a = -3k \psi_a$

masa B) $F = idem.$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{3k}{m}$

(ver si hay q')

Si uno quisiera resolver el problema de buscar los modos normales adecuadamente, primero se plantean las EE.

$$m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -k \psi_a + k(\psi_b - \psi_a)$$

$$m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -k \psi_b - k(\psi_b - \psi_a)$$

Si sumamos ~~estas~~ y restamos estas ec. obtenemos:

(50)

$$\oplus \quad m \frac{d^2(\psi_a + \psi_b)}{dt^2} = -k(\psi_a + \psi_b)$$

$$\ominus \quad m \frac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3k(\psi_a - \psi_b)$$

Notar q' son
las ec. para
los modos

o sea que $\psi_1 = \psi_a + \psi_b$ y $\psi_2 = \psi_a - \psi_b$ son las

coordenadas normales de este sistema con freq. $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ y $\omega_2^2 = \frac{3k}{m}$

respectivamente.

Las expresiones de $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son

$$\psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \text{y} \quad \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Notar que con estas variables, el mov. se descompone en

- mov. del CM (a menos de $\frac{1}{2}$)

- mov. "interno"

En este caso las coord. normales son fáciles de interpretar, eso

no siempre ocurre, es por eso q' en ciertos casos mantenemos el

sistema de coord. tradicional frente a las coord. normales, porque

es + fácil de entender.

Invirtiendo el prob. podemos expresar el mov. de y_a y y_b en términos

de los modos normales:

$$2 \psi_a(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

$$2 \psi_b(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$$

Para determinar A_1 y A_2 , ϕ_1 y ϕ_2
de las cond. iniciales.

(Notar que ya sabemos q' $\frac{B_1}{A_1} = 1$ y $\frac{B_2}{A_2} = -1$)