Probl. adic. (Práctica ó p/el col) → osc. transv. en el mismo sistema

↳ Crawford cap. 1 sec. 1,4 ej 9

## Batidos ó Pulsaciones

Hay numerosos fenómenos en q' el mov. de una parte móvil es la superposición de dos (o más) oscilaciones armónicas de ≠ frecuencia, por ejemplo dos osc. armónicas correspondientes a un sistema con 2 grados de libertad, a fuerzas impulsoras debidas a dos sist. oscilantes desacoplados ó a dos diapasones de frecuencias diferentes.

En el último caso c/diapasón produce su propia nota y el mov. q' llega al tímpano es una superposición de las 2 oscilaciones.

Sup. para simplif., q' las 2 osc. tienen = amplitud y cte de fase (a la que igualamos a cero corriendo el origen de t).

$$\Rightarrow \psi_1 = A\cos(\omega_1 t) \qquad \psi_2 = A\cos(\omega_2 t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)}$$

Esta expresión puede reescribirse de otra forma para analizar el mov. resultante de la superposición definiendo

$$\omega_p = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad y \quad \omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \Psi = A \cos(\omega_p t + \omega_{mod} t) + A \cos(\omega_p t - \omega_{mod} t)$$

usando $\cos(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a (verifiquenlo)

$$\Psi = 2A \cos(\omega_{mod} t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

Si bien es arbitrario, podemos decir que esto equivale a una oscilación con frecuencia $\omega_p$ cuya amplitud varía con el tiempo ó:

$$\Psi = A_{mod}(t) \cos(\omega_p t)$$

$$\text{con } A_{mod}(t) = 2A \cos(\omega_{mod} t) \longrightarrow$$

Este término modula la amplitud

La expresión según $\omega_1$ y $\omega_2$ es correcta y exacta, pero la representación con $\omega_p$ y $\omega_{mod}$ es más útil para analizar el comportamiento en la superposición.

Veamos el caso en q' $w_1 \approx w_2$ y por lo tanto

$$w_p \approx w_1 \approx w_2 \quad y \quad w_{mod} << w_p$$

⇒ Tenemos oscilaciones rápidas con $w_p$ moduladas por una variación de amplitud lenta dada por $w_{mod}$

(Dibujarlo)

Notar q' el límite $w_1 = w_2$ da lugar a $w_{mod} = 0$ y $w_p = w_1 = w_2$

con lo que sólo sumamos oscilaciones de = frec., resultando en una duplicación de la amplitud, el tema interesante ocurre cuando $w_1$ y $w_2$ son levemente ≠ y $w_{mod}$ es finita, lo que en el libro de Crawford se llama ondas casi armónicas.

Veamos algunos ejemplos de ~~[illegible]~~ pulsaciones:

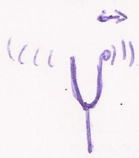
Ej (sin hay t)

- Hablamos de las oscilaciones q' se producen en el tímpano originadas por 2 diapasones. Veamos el problema aunque por ahora no entremos en la prop. de las ondas.

1º ¿Q' variables debemos controlar para q' ambos diapasones produzcan la misma perturbación?

↳ Dist. al oído, ~~[illegible]~~ golpearlos con = fza, al mismo $t_0$

2º ¿Cómo es que sin tocarlo, perturba al oído? ¿Cómo nos llega el sonido?



El diapasón al oscilar, produce una compresión/expansión del aire a su frec. característica, que provoca una variación local en la presión. El aire comprimido se descomprime y perturba al aire cercano comprimiéndolo, y así sucesivamente.

El resultado es una perturbación que se desplaza en el aire → onda de sonido

Esa onda de sonido llega al tímpano, una membrana vibrante, que es perturbada por la variación de presión que le llega y vibra a esa frecuencia. Eso es lo que interpretamos como sonido.

Detalles de color (o sonido)

1) Si las ~~3~~ 2 frecuencias son muy lejanas. (Qué tanto depende del individuo) nuestro oído escuchará 2 sonidos bien diferenciados sonando en conjunto → acordes (por ej si las frec. son tq $\omega_2 = \frac{5}{4}\omega_1$ escucharemos una 3º mayor).

2) Si, en cambio, la dif. de frecuencias es muy pequeña, el oído interpretará el sonido como una nota dada por $\omega_p$ cuya amplitud está modulada.

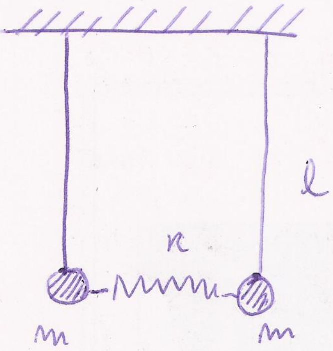
Es decir q' en el caso 1) el oído interpreta en términos de $\omega_1$ y $\omega_2$ y en el $\boxed{2)}$ en términos de $\boxed{\omega_p \text{ y } \omega_{mod}}$

Es interesante notar q' el oído no diferencia entre la parte "positiva" y la "negativa" de $A_{mod}(t)$, escucha un sonido fuerte tanto en el máximo como en el mínimo, es por eso q' se

dice que el oído es un detector de ley cuadrática, detecta el cuadrado de la perturbación. El sonido es máximo 2 veces por ciclo → $\boxed{\omega_{pulsación} = 2\,\omega_{mod} = \omega_1 - \omega_2}$

Proponer que eleven al cuadrado $A_{mod}(t)$ y obt. $\omega_{puls.}$ a partir de su expresión $\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

## Otro caso: Péndulos débilmente acoplados.




Consideremos el sistema de 2 péndulos acoplados por un resorte. Por analogía con el problema de las 2 masas unidas por 3 resortes podemos intuir los modos normales.

El modo 1 será análogo a aquel en el cual las 2 masas se movían rígidamente, o sea q' el resorte no aplica ninguna fuerza.

y se cumple $\psi_a(t) = \psi_b(t)$

Suponiendo un desplazamiento peq. resp. del equilibrio (áng. pequeño) entonces ambas masas están gobernadas por la sig. ecuación

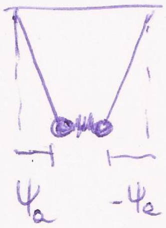
$$M l \ddot{\theta} = M g \operatorname{sen}\theta \approx M g \theta$$ (el resorte no aparece),

y como ambas están sometidas a fzas = ⇒ la evolución hará que nunca aparezca dado q' la distancia relativa se conservará

⇒ tendremos una osc. de ambas masas con frecuencia $\boxed{\omega_1^2 = \frac{g}{l}}$

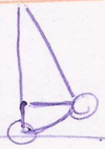
y $\boxed{\psi_a = \psi_b}$

Veamos si el modo 2 puede considerarse con $\psi_a = -\psi_b$




Si desplaz. $\psi_a$ a la masa 1 y $-\psi_a$ a la masa 2, el resorte se comprime $2\psi_a$ $\Rightarrow$ la fza sobre ambas masas, debida al resorte es $2K\psi_a$ en el sentido que corresponda a c/u.

Notar q' la componente de la gravedad actúa en el mismo sentido que la fza. del resorte. Recordando que la frecuencia es la fza por unidad de masa y de desplazamiento, y aproximando que el arco $\simeq$ estiramiento del resorte.



$$\Rightarrow \boxed{\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m} \quad \text{y} \quad \psi_a = -\psi_b}$$

Queremos estudiar la superposición de estos 2 modos, o sea:

El mov. del péndulo a está dado siempre por la superposición de 2 osc. armónicas con frec. $\omega_1$ y $\omega_2$ (el del b idem).

$$\longrightarrow \psi_a(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

Esta superposición dará lugar a pulsaciones si $\omega_1 \simeq \omega_2$ que, como vemos, puede lograrse haciendo $m$ muy grande ó $K$ muy chico

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{INTERACCIÓN DÉBIL}}$ (comparada con el peso)

INI

Podemos expresar (al igual q' en el caso de 2 masas conectadas por resortes) el mov. en término de las coordenadas normales $\psi_1$ y $\psi_2$ tq:

$$\begin{cases} \psi_a(t) = \psi_1 + \psi_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \psi_b(t) = \psi_1 - \psi_2 = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

De nuevo, para simplificar el cálculo (además de que en ese caso las pulsaciones se maximizan) elegiremos las cond. inic. tq $B_1 = B_2 =$

$= \boxed{A_1 = A_2}$ (si una es >> q' la otra ⇒ es prácticamente una osc. pura en un modo).

Diremos TB q' $\varphi_1 = \varphi_2$ → ambos modos son excitados al mismo tiempo, al q' llamamos $t=0$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = 0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) \\ \psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

y sus velocidades serán

$$\begin{cases} \dot{\psi}_a = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) - \omega_2 A \sin(\omega_2 t) \\ \dot{\psi}_b = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_2 A \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

¿A q' cond. inic. corresp. esto?

Notemos que para obtener $A_1 = A_2 = B_1 = B_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

las condiciones iniciales deben ser

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi_a(0) = 2A & \psi_b(0) = 0 \\ \dot{\psi}_a(0) = 0 & \dot{\psi}_b(0) = 0 \end{array}}$$

~~Ver revisar bien eq. 2A~~

O sea, desplazamos en $2A$ la masa "a" ~~y soltamos~~ manteniendo a "b" en su posición de eq. y soltamos a ambas juntas. (Verificarlo)

Más allá de esto, sabemos q' el resultado del mov. será el de la pulsación

$$\psi_a(t) = \underbrace{\left[2A \cos(\omega_{mod}\, t)\right]}_{= A_{mod}(t)} \cos(\omega_p t)$$

~~y $\psi_b(t) = A \cos \omega_1$~~

con $\omega_p = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

y $\omega_{mod} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

Similarmente ~~$\psi_b(t) = \left[2A \operatorname{sen}(\omega_{mod}\, t)\right] \cos(\omega_p t)$~~

$$\psi_b(t) = \underbrace{\left[2A \operatorname{sen} \omega_{mod}\, t\right]}_{= B_{mod}(t)} \operatorname{sen}(\omega_p t) \quad (*)$$

Ocurre un fenómeno sumamente interesante, $A_{mod}(t)$ y $B_{mod}(t)$ están desfasadas en $\frac{\pi}{2}$, o sea q' cuando una es máxima o mínima, la otra es cero, o sea que la energía va pasando de uno a otro péndulo, que pulsan desfasados en $\frac{\pi}{2}$

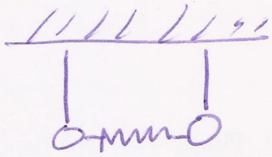
# Resonancias en sist. con 2 grados de libertad

Habíamos analizado sistemas con más de un grado de libertad, aparecieron los modos normales, de tal forma q' ~~[illegible]~~ el mov. de ese sistema puede siempre expresarse como la superposición de esos modos que, básicamente, se comportan c/u como un osc. armónico.

¿Qué ocurre si incluimos disipación?

El mecanismo tendrá q' ver con rozamiento sobre las cuerdas ó sobre las masas (q' forman el sistema). Si suponemos q' es sobre c/u de las masas del sistema de bolitas conectadas x resortes hay una F. $\propto$ a la velocidad (como en el caso 1D) → c/masa tendrá su cte de amort. y un tiempo de decaimiento característico $\tau$.

Por ej. en el sistema q' analizamos



Digamos q' ambas masas tienen una cte de amort. igual al moverse. Si además el resorte está sometido a un amortiguamiento al estirarse o comprimirse (por su forma) $\Rightarrow$ el coef de amort. global del modo 2 va a ser mayor q' el del modo 1, ya q' en el modo 2 el resorte se comprime y se expande.

→ $\gamma_2 > \gamma_1$ y $\therefore$ $\tau_2 < \tau_1$

SEGUIR ACÁ

60

¿QUÉ ESPERAMOS AL FORZARLO?

ES DE ESPERAR Q' SI EL MOV. DEL SISTEMA PUEDE REPRESENTARSE COMO 2 MODOS SUPERPUESTOS, C/U DE LOS CUALES ES UN OSC. ARM. CON UNA FREC. PROPIA, ENTONCES SI EXCITAMOS AL SISTEMA VARIANDO LA FRECUENCIA, HALLAREMOS QUE ABSORBE ENERGÍA PREFERENTEMENTE EN LAS FRECUENCIAS DE LOS MODOS NORMALES, O SEA QUE TENDREMOS DOS OSCILADORES ~~DESP.~~ QUE PUEDEN ENTRAR EN RESONANCIA.

PARA CADA RESONANCIA VALDRÁ QUE $\Delta\omega_i = \gamma_i = \frac{1}{\tau_i}$, COMO VIMOS QUE OCURRÍA PARA EL OSC. ARM. 1D FORZADO

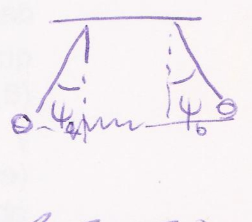
PARA QUE ESTO PUEDA OBSERVARSE CLARAMENTE, LAS FREC. DE RESONANCIA INDIVIDUALES DEBEN ESTAR SEPARADAS POR AMPLIOS INTERVALOS DE FRECUENCIA COMPARADOS CON LOS $\Delta\omega$

VEAMOSLO CON EL MISMO EJEMPLO Q' ANALIZAMOS PREVIAMENTE, TENEMOS 2 PÉNDULOS, ACOPLADOS POR UN RESORTE Q' LOS UNE.

PARA SIMPLIFICAR VAMOS A HACER Q' $m_a \simeq m_b = m$ Y QUE AMBAS MASAS TIENEN EL MISMO COEFICIENTE DE AMORTIGUAMIENTO $\gamma$

LAS EC. DE MOV. PARA LAS 2 MASAS (a y b) SERÁN ENTONCES:

(DIBUJAR EL DISP.)




(sen $\psi_a$)

$$m\cancel{\ell}\ddot{\psi}_a = -\frac{mg}{\ell}\psi_a - K\cancel{\ell}(\cancel{\ell}\psi_a - \cancel{\ell}\psi_b) - \overset{m}{\gamma}\cancel{\ell}\dot{\psi}_a$$

ARCO

PARA CONSERVAR LA DEF. DE $\gamma$ PREVIA

$$\Rightarrow \ddot{\psi}_a = -\frac{g}{\ell}\psi_a - \frac{K}{m}(\psi_a - \psi_b) - \gamma\dot{\psi}_a$$

De la misma forma

$$\ddot{\psi}_b = -\frac{g}{l}\psi_b + \frac{k}{m}(\psi_a - \psi_b) - \gamma\dot{\psi}_b$$

Si sumamos ambas ec. obtenemos:

$$\ddot{\psi}_a + \ddot{\psi}_b = -\frac{g}{l}(\psi_a + \psi_b) - \gamma\,\dot{\psi}_a + \dot{\psi}_b$$

y si las restamos:

$$\ddot{\psi}_a - \ddot{\psi}_b = -\frac{g}{l}(\psi_a - \psi_b) - \gamma(\dot{\psi}_a - \dot{\psi}_b) - \frac{2k}{m}(\psi_a - \psi_b)$$

o sea 2 osciladores armónicos para las coord. normales definidas x $\psi_1 = \frac{\psi_a + \psi_b}{\cancel{2}}$ y $\psi_2 = \frac{\psi_a - \psi_b}{\cancel{2}}$

consejo: $2\psi_a = \psi_1 + \psi_2$ y $2\psi_b = \psi_1 - \psi_2$

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_1 = -\gamma\dot{\psi}_1 - \frac{g}{l}\psi_1 \\ \ddot{\psi}_2 = -\gamma\dot{\psi}_2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\psi_2 \end{cases}$$

o sea, las ec. p/los modos normales ya vistos, pero ahora con disipación.

Supongamos que ponemos una fuerza sinusoidal sobre la masa "a"

$\Rightarrow$ en la ec. p/ella aparece un término $F_0 \cos\omega t$

$\Rightarrow$ al sumar las ec. para $\psi_a$ y $\psi_b$ y div. x 2 (cambiar las $\psi_a, \psi_b \to \psi_1, \psi_2$)

$$\begin{cases} \ddot{\psi}_1 = -\gamma\dot{\psi}_1 - \frac{g}{l}\psi_1 + \frac{F_0}{2}\cos\omega t \\ \ddot{\psi}_2 = -\gamma\dot{\psi}_2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\psi_2 + \frac{F_0}{2}\cos\omega t \end{cases}$$

Son 2 osc. forzados desacoplados

Si cada parte (a y b) se mueve como superposición de modos forzados ⇒ :

$$2\psi_a = \psi_1 + \psi_2$$

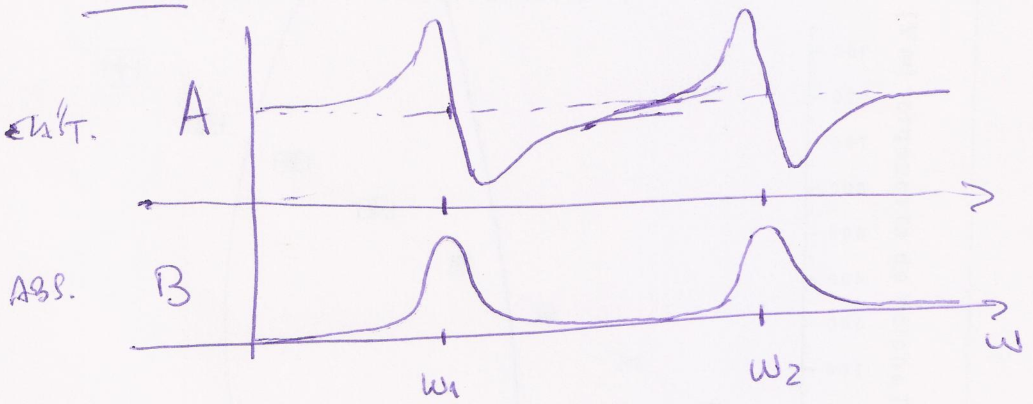
$$2\psi_b = \psi_1 - \psi_2$$

$\psi_1, \psi_2$ los modos se comportan como osc. forzados indep. y desacoplados con: su propia amp. elást. y su propia amp. abs.

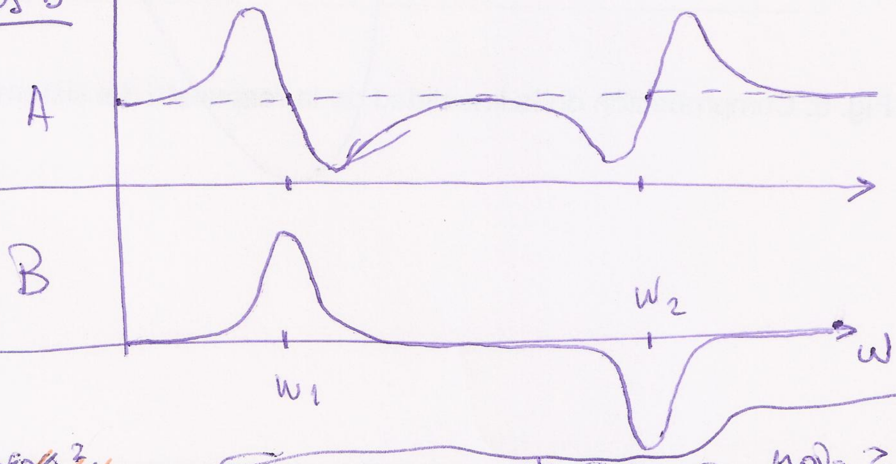
⇒ las amplitudes elásticas (A) y absorbentes (B) de cada parte móvil serán: la suma de las amplitudes de ambos modos para la masa a y la resta de las amplitudes de ambos modos para la masa b

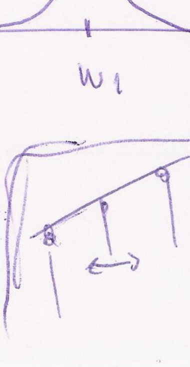
⇒ Dado que las amplitudes son básicamente ≠ ∅ cerca de la frec. de resonancia

Masa a




Masa b



→ No excita el modo 2 (pág 47)

→ Reglas de selección ⟷ Forma de forzado