PAQUETES DE ONDAS

¿Qué pasa con ondas no sinusoidales?

Empecemos por lo + sencillo → superpos. de 2 ondas de ≠ frec.
$\mathcal{E}$ = amplitud.

BATIDO DE 2 ONDAS PROPAGANTES

Ya vimos lo q' ocurre cuando 2 oscilaciones de frecuencias ≠ se superponen (osc. 2 gr. lib) → BATIDO

Sup. 2 ondas q' se propagan a la derecha y se superponen en x

$$\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = A\, e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + A\, e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}$$

En $x=0$ $$\Psi(0,t) = A\left(e^{i\omega_1 t} + e^{i\omega_2 t}\right) + c.c.$$

Esto ya lo vimos, vimos q' si def.

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} \quad y \quad \Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

$$\Psi(0,t) = A\, e^{i\bar{\omega}t}\left(e^{i\Delta\omega t} + e^{-i\Delta\omega t}\right) = 2A\, e^{i\bar{\omega}t}\cos(\Delta\omega t)$$

Tomando parte real queda lo mismo que vimos

Para $x \neq 0$ definimos $$\bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2} \quad y \quad \Delta k = \frac{k_1-k_2}{2}$$

y haciendo los reemplazos llegamos a:

$$\Psi(x,t) = A\, e^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}x)}\left(e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)}\right)$$

ó $$\Psi(x,t) = 2A\, e^{i(\bar{\omega}t - \bar{k}x)}\cos(\Delta\omega t - \Delta k x) + c.c.$$

Acá también hay un batido, pero con fases ≠, q' dependen del tiempo (en x)

y son básicamente originadas por el retardo que ocurre en la propagación de las ondas desde $x=0$ hasta x

LA PORTADORA TIENE UNA VELOC. DE FASE $v_f = \frac{\bar{\omega}}{k}$

Y LA MODULADORA $v_B = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}$ → VELOC. DEL BATIDO.

P/LA EC. DE ONDAS CLÁSICA $\omega = ck$ Y ENTONCES $v_f = v_B$

PARA LA DE KLEIN-GORDON → $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\omega_0^2}{k^2} + c^2 > c^2$$

Y SUPONIENDO $\omega_1 \approx \omega_2 = \bar{\omega} \gg \Delta\omega$

$$\Rightarrow \Delta\omega \approx \frac{d\omega}{dk} \Delta k \quad \text{(APROX. LINEAL)}$$

$$v_B = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \approx \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_f} < c^2$$

Y EN ESTE CASO EL BATIDO SE PROPAGA + LENTO Q' LA PORTADORA

CORRIMIENTO DE LA FASE A CADA t

$$\Rightarrow \text{NOTAR Q' } f(\omega t - kx) = f\left[k\left(\frac{\omega}{k} t - x\right)\right] = f'(x - v_f t)$$

v_f

NOTAR Q' ES + IMPORTANTE CUÁNDO LLEGA EL BATIDO (MÁXIMO DE LA MODULADORA) Y NO TANTO EL MÁXIMO DE LA PORTADORA (EN TÉRMINOS DEL TRANSPORTE DE ENERGÍA.)

Esto se puede analizar en términos de la energía:

Recordemos q' la densidad de energía tiene un término cinético proporcional a $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$ y otro potencial $\propto \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$.

Es claro q' una onda armónica pura no puede transmitir información, incluso si es propagante, debe construirse un "paquete" modulándola para que haya alguna estructura q' se desplace.

$\Rightarrow$ Hay q' modular su amplitud ó su frecuencia (el batido modula la amplitud).

En general esto tendrá una forma $A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$

(+ la relac. de dispersión), el batido es el caso + simple

↳ lo q' nos va a interesar es "cuándo" llega la modulación,

o sea $\rightarrow$ $v_B = \frac{d\omega}{dk}$ es la + interesante y también se conoce como velocidad de grupo

Paquetes de ondas periódicos

Sup. N ondas sinusoidales q' viajan hacia la derecha y se superponen todas en fase

Supongamos q' están equiespaciadas en frecuencia:

$\omega_m = \omega_0 + m\,\delta\omega$ $\quad m = 0, \ldots, N-1$

$\Rightarrow \psi(x,t) = \sum_{m=0}^{N-1} A_m e^{i(\omega_m t - k_m x)} + \text{c.c.}$

Ψ en $x=0$

En $x=0$

$$\Psi(0,t)=\sum_{m=0}^{N-1} A_m e^{i(\omega_m t)} + c.c. =$$

$$= e^{i\omega_0 t}\underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} A_m e^{i m \delta\omega t}}_{} + c.c.$$

PORTADORA (FREC. "MEDIA")

MODULADORA q' DEPENDE DEL TIEMPO (DIF. ENTRE FRECUENCIAS)

$\Delta\omega$

ω_0 $\quad N\delta\omega$

Esta diferenciación sólo tiene sentido si $N\delta\omega \ll \omega_0$ como para que la modulación ($\delta\omega$) de mayor frecuencia sea aún menor a la portadora

Todos los términos de la suma son periódicos en $T=\frac{2\pi}{\delta\omega}$

$\delta\omega$ es la frec. menor, o sea q' T es el período q' contiene a todos los períodos correspondientes a $m\delta\omega$ con $m\geq 1$

$$\Rightarrow \Psi(0,t+T) = e^{i\omega_0 t}\, e^{i\omega_0 T}\sum_{m=0}^{N-1} A_m e^{i m\delta\omega(t+T)} + c.c. =$$

$$= e^{i\omega_0 t}\, e^{i\omega_0 T}\sum_{m=0} A_m e^{i m\delta\omega t} + c.c. =$$

$$= e^{i\omega_0 T}\,\Psi(0,t)$$

En gral. $\Psi(0,t) = e^{i\omega_0 t} f(t)$ — Moduladora

Periódica en T

Pues si cuando el miembro se multiplica

Ψ en $t+T$ obtengo:

$$e^{i\omega_0 (t+T)} f(t) = e^{i\omega_0 T}\, e^{i\omega_0 t} f(t)$$

Veamos como viaja el paq. ⇒ desarrollo k_n a 1° orden en $\Delta\omega$, esto es (quiero obt. v_g) (necesito q' $\Delta\omega \ll \omega_0$)

$$k_n = k_n(\omega_n) \simeq k(\omega_0) + \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0} \cdot n\,\delta\omega =$$

$$= k_0 + k'\, n\,\delta\omega$$

Analizo v_x

en x

Reescribo $\psi(x,t)$:

$$\psi(x,t) = e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \sum_{n=0}^{N-1} A_n\, e^{i n\,\delta\omega\,(t - k'x)} =$$

$$= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)}\, f(t - k'x)$$

Por cualquier x, la modulación o envolvente es la misma, pero retrasada un tiempo $k'x$

⇒ la velocidad de la envolvente es $v_g = \frac{1}{k'} = \frac{d\omega}{dk}$ $\quad \frac{x \text{ (posic)}}{k'x \text{ (tiempo)}}$

lo q' se conoce como velocidad de grupo

Notemos q' "la forma" del pulso no cambia (al viajar en x), a lo sumo cambia la fase de la portadora, que no viaja a la misma veloc. q' la envolvente

⇒ la envolvente en ≠ puntos x es "casi" igual pero corrida (vs. t) en $t_0 = k'x$

Por supuesto q' esto sólo vale si $k_n \simeq k_0 + k'\, n\,\delta\omega$

En part. ec. ondas clásica → viaja sin distorsión, rel. lineal

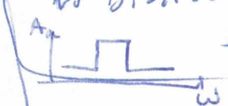
Si hay términos de orden sup. muy relevantes el pulso se va a distorsionar (aparecen + términos en la sumatoria y ya no es simplemente la f corrida)

ENERGÍA DEL PAQUETE — ESPECTRO CUADRADO

Veamos el caso de N ondas sinusoidales con ω equiespaciadas

$$\Rightarrow \underset{\text{(moduladora)}}{f(t)} = \sum_{m=0}^{N-1} \underbrace{A_m}_{=A} e^{i\delta\omega t m} = A \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{i\delta\omega t}\right)^m$$

y amplitud uniforme. (Graficar la distrib.)



Usando que $\longrightarrow \displaystyle\sum_{m=0}^{N-1} q^m = \frac{q^N - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1)$

$$\Rightarrow f(t) = A\,\frac{e^{iN\delta\omega t} - 1}{e^{i\delta\omega t} - 1} =$$

$$= A\,\frac{e^{iN\frac{\delta\omega t}{2}}}{e^{i\frac{\delta\omega t}{2}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(N\delta\omega t/2\right)}{\operatorname{sen}\left(\delta\omega t/2\right)}$$

$$\Rightarrow \psi(x=0,t) = \underbrace{A\, e^{i\left[\omega_0 + (N-1)\frac{\delta\omega}{2}\right]t}\; \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)}}_{\text{mod.} f \times e^{i(\omega_0 t)}}$$

Vemos q' la portadora oscila a la frec. media entre

$$\omega_0 \;\text{ y }\; \omega_0 + (N-1)\delta\omega \longrightarrow \frac{\omega_0 + \omega_0 + (N-1)\delta\omega}{2} = \omega_0 + \frac{(N-1)\delta\omega}{2}$$

Es conv. q' la portadora tenga una frec. cerca del promedio, aunque su elección es arbitraria.

La envolvente o moduladora es entonces

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{N\delta\omega t}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi N t}{T}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\delta\omega}$$

22

119

Para t chico $(<<T)$

$$f(t) \approx \frac{\pi N t / T}{\pi t / T} = N \quad \text{(nº de ondas superpuestas)}$$

$\downarrow$

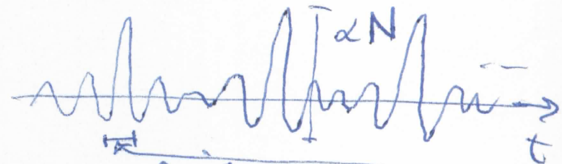
$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha$

Ver Martínez p. 113
p/N=5 y N=11

Además como $f(t) = f(t+T)$ esto se repite para $t = mT$

(a menos de un signo, ya q' para N par el signo se va alternando)

$\Rightarrow f(t)$ es periódica en $2T$

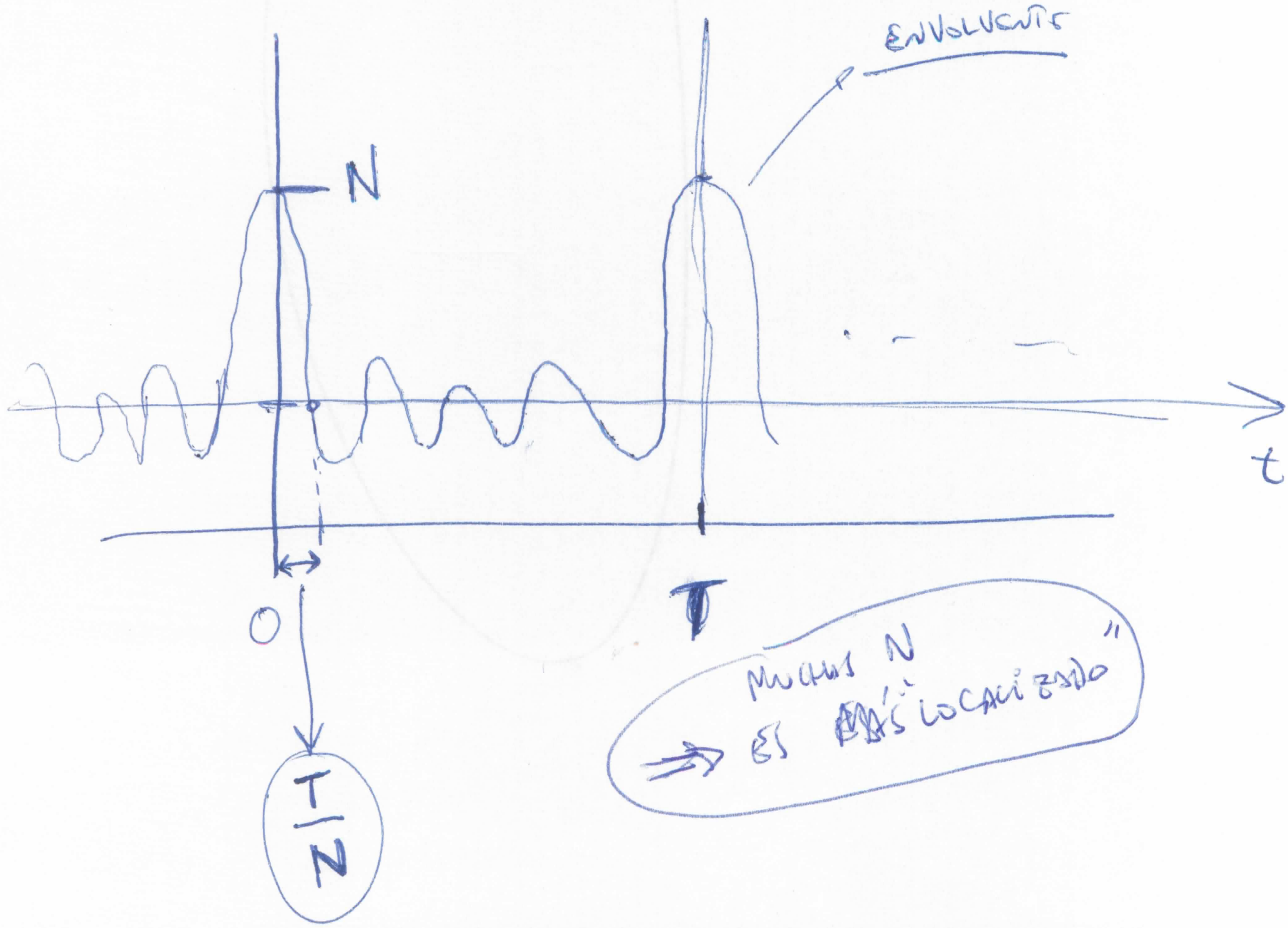


- En cada pico (al ser periódica) el ancho es igual.

- El primer cero de la función ocurre en $\frac{\pi N t}{T} = \pi$,

o sea en $\Delta t = \frac{T}{N} \longrightarrow$ a más componentes

"el pulso es más corto." (temporalmente hablando)



"Muchos N
$\Rightarrow$ es más localizado"

En términos de la frecuencia portadora (ω_0), el ancho de la envolvente es:

$$\boxed{\underbrace{\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N\delta\omega}}_{\oplus} \gg \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Pues la separac. entre ambas (portadora y envolvente) sólo tiene sentido si: $N\delta\omega \ll \omega_0$

⇒ la duración de la envolvente es mucho mayor que el período de la portadora ⇒ dentro de la envolvente, la portadora oscila varias veces.

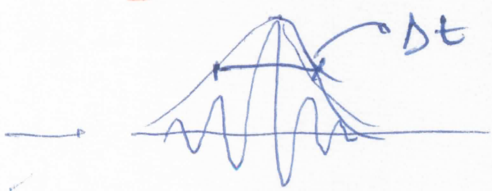
→ Aprox. de envolvente lenta.

⊕ Indica una relación entre la duración del pulso Δt y el "ancho espectral" (el rango de frecuencias utilizadas para describir el pulso) $\Delta\omega$ → $\boxed{\Delta t \cdot \underbrace{N\delta\omega}_{\Delta\omega} = 2\pi}$

la def. del ancho es arbitraria

q' se suele expresar $\Delta t \cdot \Delta\nu \simeq 1$

En realidad, en la superposición que planteamos todas las ondas están en fase, en ese caso la amplitud resultante es máxima



Si las ondas no estuvieran en fase esta amplitud sería menor, con lo cual uno debería pensar cómo definir un ancho en el q' el pulso sea "apreciablemente $\neq 0$"

(el Δt nunca será mayor q' el de arriba)

⇒ teniendo eso en cuenta se coloca la relación de arriba como una cota → $\Delta t \gtrsim \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ ⇒ $\boxed{\Delta t \cdot \Delta\nu \gtrsim 1}$

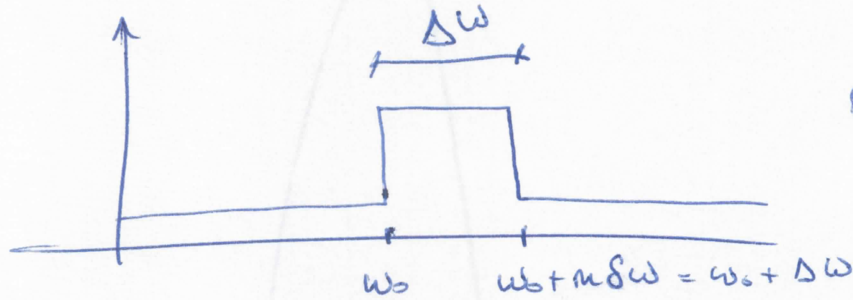
La relación mostrada es fundamental en mecánica ondulatoria y también se cumple para la coord. espacial:

Nos dice q' para q' el pulso tenga bien definido el t ($\Delta t \ll 1$)

$\Rightarrow$ Δp debe crecer, en part., si requiero q' $\Delta t \to 0$

$\Rightarrow \Delta\nu \to \infty$ (nec. ∞ frecuencias!!)

¿Cómo se ve en frecuencias?



PULSO "CUADRADO"

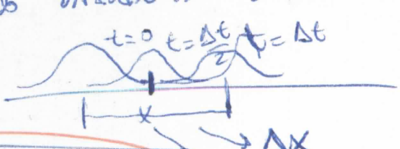
En la coord espacial:

Uno puede pensar q' el $\Delta\omega$ es análogo ~~está relacionado~~ con un ancho en la distribución de k's (cada ω da lugar a un k por la relac. de dispersión).

Por ejemplo, en la aprox. a 1º orden dijimos $k_n \approx k_0 + k' \, n\delta\omega$

Para $n=N$ $\Rightarrow$ $\Delta k \approx \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{k_0} \cdot \Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} = \frac{2\pi\Delta\nu}{v_g}$

Si el ancho del pico es Δt $\Rightarrow$ sólo puedo diferenciar la posición del pulso si recorre una distancia $\Delta x \approx v_g \Delta t$



$$\Rightarrow \boxed{\Delta k \cdot \Delta x \approx \frac{2\pi\Delta\nu}{v_g} \cdot v_g \Delta t \simeq 2\pi}$$

para pos. x fija Δt es el t en q' aparece y desaparece el pulso

Origen del principio de incertidumbre en méc. cuántica

¿Qué significa "Paquete no dispersivo"?

Sabemos q' en general $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, No es igual p/todo ω (o k), ~~[illegible]~~ entonces

En gral vamos a tener una distribución

$$\Delta v_g = \overbrace{\left(\frac{dv_g}{dk}\right)_{k=k_0}}^{1^{\circ}\text{ orden}} \Delta k = \frac{d}{dk}\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k=k_0} \Delta k =$$

($\frac{d\omega}{dk} \to v_g$)

$$= \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k=k_0} \cdot \Delta k$$

$\Rightarrow$ el ancho Δx va a estar dado por las ondas + lentas y las + rápidas, limitadas por Δv_g

Δx: ancho espacial del pulso.

$$\boxed{\Delta x(t) = \Delta x_0 + \Delta v_g \cdot t}$$

o sea q' si $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)$ cambia con k el ancho del paquete cambia.

Un pantallazo de Fourier

(revisar con 2.3, 6.3 y 6.4 del Crawford)

Vimos que la superposición de muchas ondas da lugar a una onda cuya evolución puede describirse sabiendo la evolución de las ondas que la forman. (uno sabe cómo evolucionan sinusoides)

Pregunta: ¿se podrá descomponer cualquier función en componentes sinusoidales?

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi}{T}nt} + \text{c.c.}$$

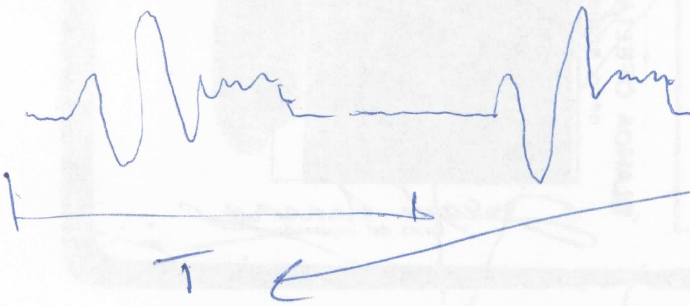
Así expresada, $f(t)$ debe ser periódica y de período T

No responderemos si esto es posible (MAT. IV)

Aceptaremos q' esto es posible ∀ funciones continuas,

si no son periódicas podremos tomar T suf. grande como para que todo el intervalo de interés caiga dentro del mismo período.

y en todo caso "repetir" la función para que sea periódica.



$m \in \mathbb{Z}$ (conjugado)

Las func. q' se usan p/el desarrollo → $f_m = e^{i\omega_0 m t}$; con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

La idea es ahora obtener los C_m

Para esto usamos estas 2 prop. (buscamos prop. de ortogonalidad)

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f_n f_m \, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} e^{i\omega_0 (n+m)t} \, dt$$

i) si $n = -m$ $(n+m=0)$ $\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} dt = T$

ii) si $n+m \neq 0$ $\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} f_n f_m \, dt = 0$ Demostrar (Martínez o Crawford)

Hay una relac. de ortogonalidad entre f_n y f_m

→ tengo q' mult. por f_{-n} e integrar

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-i\omega_0 m t}\, dt = C_m T \quad (m>0)$$

f_{-m}

SÓLO SOBREVIVE EL TÉRMINO CON $n = m$

NOTAR Q' $C_m^* = C_{-m}$

Para $m=0 \rightarrow \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt = 2C_0 T$

SÓLO SOBREVIVE C_0 y C_0^*

LA INTEGRAL DE UNA SINUSOIDE EN UN PERÍODO ES CERO

$$\left(f(t) = \sum_m C_m e^{i\omega_0 m t} \right)$$

$$\Rightarrow C_0 = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, dt$$

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{-i\omega_0 m t}\, dt$$

NOTAR Q' $C_{-m} = C_m^*$ Q' SÓLO CONSISTE EN CAMBIAR EL (−) DEL EXPONENTE POR UN SIGNO POSITIVO.

HAY FORMAS ALTERNATIVAS DE EXPRESAR $f(t)$ USANDO UNA SUMATORIA DE $-\infty$ A $+\infty$, LOS C_m SON IGUALES PARA TODO m

Ó CON $C_m = \dfrac{B_m - i A_m}{2}$

EN ESTA ÚLTIMA SE PUEDE SEPARAR A LAS SUMAS EN COSENOS Y SENOS, LO CUAL ES ÚTIL PARA USAR LA SIMETRÍA DE ESTAS FUNCIONES.

Para $f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \, e^{i w_0 m t}$

y los C_m mantienen la definición previa con $m \in \mathbb{Z}$

Si cambiamos por senos y cosenos, queda:

$$f(t) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen}(w_0 m t) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos(w_0 m t)$$

con $$A_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen}(w_0 m t) \, dt$$

y $$B_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(w_0 m t) \, dt$$

$$B_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, dt$$

→ Filtros ~~[illegible]~~, espectroscopía, son formas de separar físicamente a una part. en sus comp. de Fourier