# Ondas en 2 y 3 D

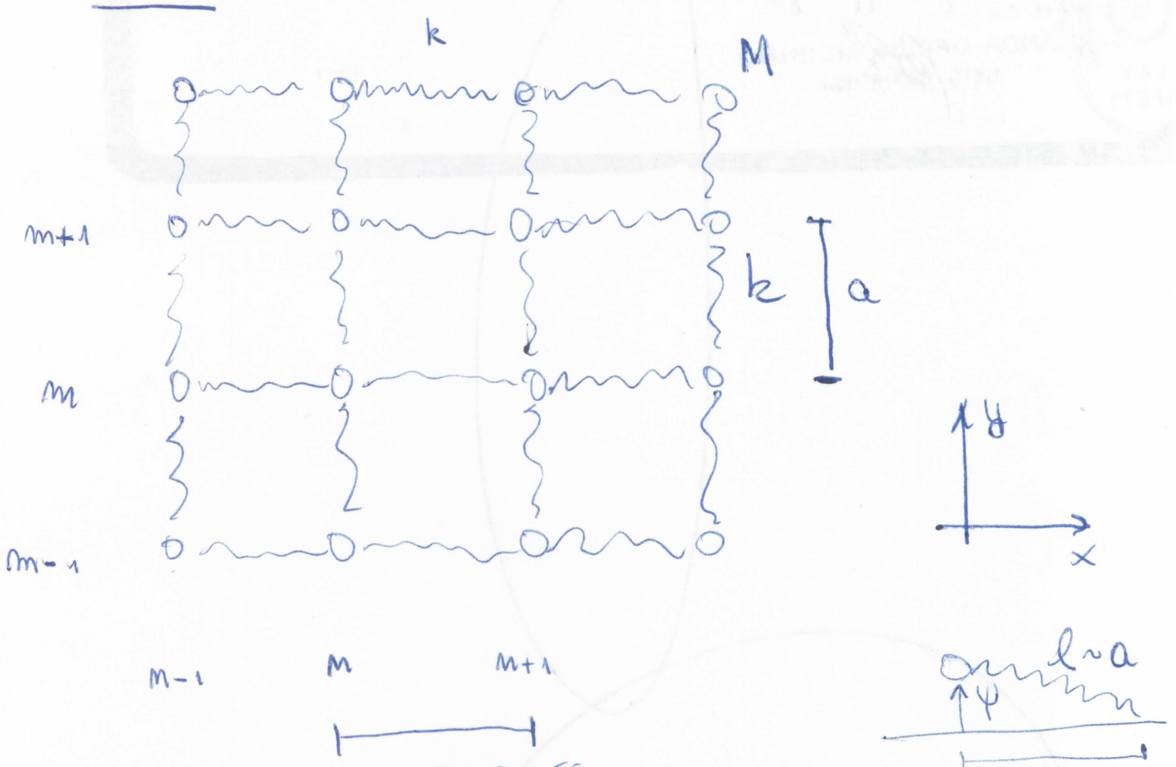
Hasta ahora → 1 dir. de prop. posible, incluso en casos en q' la prop. pudiera ocurrir en + dim. (luz, sonido).

A partir de aquí → 2 ó 3 direcc. de prop. indep.

Restringiremos a sist. isótropos (sin dir. pref.) y homog. (es un poco lo mismo).

1º red. 2D p/generalizar la ec. a 2D y luego a 3 y luego ir al continuo

## Red 2D




$a$, en eq.
$a_0$ long. en reposo

Supondremos osc. transv. (dir. $\hat{z}$) No discutiremos cond. de borde

Sup. q' $\psi_{nm}(t)$ es el apart. del eq. de la masa del sitio $nm$, q ubicada en $(na, ma)$

$T_0$ (p/ que sea lineal con $\psi$ ⇒ desarrollo el paréntesis a orden cero)

desplaz. relat. de las masas contiguas en $\hat{x}$

$$\Rightarrow M \frac{d^2\psi_{nm}}{dt^2} = \frac{K(a-a_0)}{a}\Big[\psi_{n+1,m} - 2\psi_{nm} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} - 2\psi_{nm} + \psi_{n,m-1}\Big]$$

desplaz. relat. de las masas cont. en $\hat{y}$

QUEDAN $N \times M$ ECUACIONES $\longrightarrow$ $N \times M$ SOLUCIONES DEL TIPO $\Psi_{nm}$

PARA PASAR AL CONTINUO HAGO $\Psi_{nm}(t) \longrightarrow \Psi(x_n, x_m, t)$

$\Rightarrow$ SI $a << Na, Ma$ SUPONGO LA RED CONTINUA.

EN ESE CASO:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{T_0 a}{M}\left[\frac{\Psi(x+a,y,t) - 2\Psi(x,y,t) + \Psi(x-a,y,t)}{a^2} + \frac{\Psi(x,y+a,t) - 2\Psi(x,y,t) + \Psi(x,y-a,t)}{a^2}\right]$$

LA DERIV. PASA A SER PARCIAL PUES LAS OTRAS VARIABLES PERMANECEN CTES.

EN ESTA RED $\Delta x = \Delta y = a$

NOTAR QUE LOS SUMANDOS ENTRE CORCHETES SON LAS DERIV. 2DAS DE $\Psi$ RESP. DE $x$ E $y$ PUES:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\Psi(x+a+a) - \Psi(x+a)}{a^2} - \frac{\Psi(x+a) - \Psi(x)}{a^2} =$$

$$= \frac{\Psi(x+2a) - 2\Psi(x+a) + \Psi(x)}{a^2}$$

COMO EL SIST. TIENE PERÍODO $a$ ✓

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{T_0 a}{M}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\right) \quad \left(\begin{array}{c} a \to 0 \\ T_0 a = cte \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ EC. DE ONDAS CLÁSICA EN LA 2D $v^2 = \dfrac{T_0 a}{M}$

EN 3D $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \Psi}$ ①

## ONDAS PROPAGANTES

P/la ec. de ondas 1D vimos que $\psi_1(x,y,z,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$

es soluc. TB lo va a ser de la ec. 3D, pues las derivadas

resp. de x e y son cero.

Lo mismo para $\psi_2(x,y,z,t) = B\cos(\omega t - ky + \varphi)$ y $\psi_3 = C\cos(\omega t - kz + \varphi)$

Todas con $\omega = ck$ → Las ondas 1D cumplen la ec. ondas 3D

Vamos a usar not. $e^{i(\;)}$

Busquemos el lugar en donde la fase es constante, en 1D

eso era sólo un punto, aquí (3D) se tratará de una superficie

Pues obtendremos una ecuación de x, y y z igualada

a una cte

Para $\psi_1 \longrightarrow \varphi_0 = \omega t - kx + \varphi \Rightarrow x = \frac{(\varphi - \varphi_0)}{k} + \frac{\omega}{k} \cdot t$

ó $x = x_0 + v\, t$

Lo mismo ocurrirá con $\psi_2$ y $\psi_3$ para y y z. Todas avanzarán

a $v = \frac{\omega}{k}$. Esas superficies de fase constante → Frente de ondas

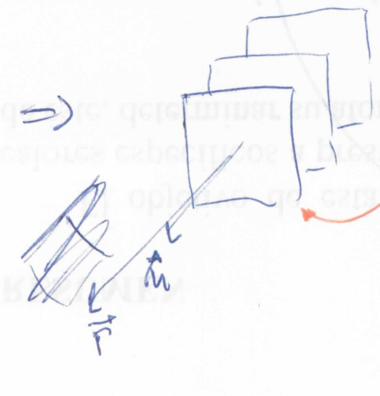
Otra solución → ondas planas

~~En un entorno pequeño, esas superficies son~~

Supongo q' los frentes de onda son planos ⟹ ONDAS PLANAS

$\hat{n}$ = versor normal a los frentes

Sabemos que la ec. de ondas vale p/soluciones en c/coor. por sep. Veamos para estos frentes



⟹ La ecuación de un plano q' avanza a $\vec{v}$

es $\hat{n} \cdot \vec{r} = r_0 + v t$ → AVANCE

ó $\boxed{k \hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi = cte}$

Que es la ecuación del frente de onda.

→ La func. queda (usando $\vec{k} = k\hat{m}$)

$$\psi(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi) = (Ae^{i\varphi})\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

$\vec{k} \equiv$ vector de onda $\longrightarrow \vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -ik_x \psi \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k_x^2\psi \quad (\text{idem } y \text{ y } z)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = i\omega\psi \Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi$$

$$\Rightarrow \nabla^2\psi = -k^2\psi$$

$\Rightarrow$ si $\omega = v k$ se satisface la ec. de ondas

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\psi}$$

Esta onda plana no se puede escribir como comb. de las ondas q' se desplazan en 1 única dir. cartesiana. ((en 1D: monocromática = plana))

De igual modo q' p/el caso 1D, podemos tener ondas estac. q' son comb. de estas ondas planas. De = $\omega$ pero en dir. opuestas.

$$\psi_c = \frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} + e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}}{2} = e^{i\omega t}\cos(\vec{k}\vec{r})$$

uso

$$\psi_s = \frac{e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{r})}}{2} = e^{i\omega t}\,\text{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r})$$

→ Todas las soluc. posibles pueden escribirse como comb. de modos normales ó de ondas planas monocromáticas.

COMENTARIO: la descomp. de ondas en ondas planas monocromáticas (infinitas), no sólo es útil, sino realizable en la práctica.

EJ: - Sist. mecánicos con filtros tan angostos como sea posible, que dejen pasar un grupo de frecuencias

- Hacer interactuar un sist. oscilante con otro sistema con resonancias muy angostas.

- LUZ $\rightarrow$ separar luz blanca en colores (prisma / red de difracción)

- Síntesis de sonidos / compresión de sonidos

La ec. de ondas clásica es no dispersiva $\rightarrow$ todas las comp. viajan a $= v$

$\Rightarrow$ además de las soluc. halladas puedo tener soluc. de carácter + gral. de la forma $f(\hat{n}\cdot\vec{r} - vt)$ siempre q' $f(x)$ pueda ser desarrollada en Fourier (continua y periódica, esto último puede generarse artificialmente.)

## Otras ec. de ondas

(evita choques $\rightarrow$ disipación)

Ondas en plasmas: un gas ionizado y enrarecido (por ej. la ionosfera) responde a la ec. de Klein - Gordon: (ver cap. 4 Crawford p/un detalle del probl. desde el punto de vista eléctrico)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2 \psi + v^2 \nabla^2 \psi$$

Es una ec. en donde las partes del sistema, además de oscilar por el acople con el entorno, tienen una frec. natural $\omega_p$ (caso péndulos acopl. $\omega_p^2 = \frac{g}{l}$)

Ionosfera $\longrightarrow$ iones $\oplus$ y $\ominus$ q' compensan $\vec{E}$ localmente

si se desequilibra la carga $\vec{E}$ se descompensa y las cargas se mueven p/volver a cero $\rightarrow$ fuerza restitutiva.

para probl. 1

$$\omega_p = \frac{4\pi N q^2}{m}$$

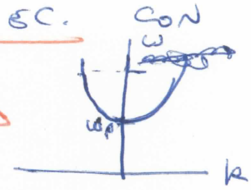
densidad de cargas (a mayor $N$, más rápido se mueven)

$\downarrow$ plasma

Sup. q' las cargas libres son de 1 $e^-$ sobrante/faltante y las densidades típicas en la ionosfera son ~ $10^4 - 10^6 \frac{\text{electrones}}{cm^3}$

Las ondas planas 3D son soluc. de la ec. con

$$\omega^2 = \omega_p^2 + v^2 k^2 \longrightarrow$$




Para $\omega > \omega_p$

Mientras q' para $\omega < \omega_p$ se obt. ondas exponenciales $(e^{-\alpha t})$

Estas ondas son evanescentes y no transp. energía, por lo q' se reflejan totalmente. (Crawford – cap. 4)

Otra vez, no es q' las soluc. no ∃ sino que al plantearlas hay q' consid. una forma + gral

Notar q' $\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = v^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} > v^2$, en part. para la luz $v_f$ podría ser mayor q' "c"

Esta parte no me gusta (Dispersión en plasmas)

Ni lo de medios transparentes → explicar en términos de la absorción y la curva de dispersión

= Comentar que básicamente es lo mismo pero con

Polarización (aislantes) $+q$ $-q$ $\uparrow \vec{E}(t)$ — Luz son ondas EM

→ aparece una ec. de ondas en la q' $\omega'(k) \neq c$

y q' aparece una corrección en la relac. de disp. → $k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}$

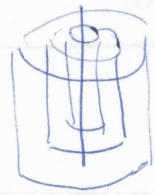
$c$ = vel. luz vacío    $n$ = índice de refracción (dep. medio, modif. $k$)

# ONDAS ESFÉRICAS Y CILÍNDRICAS

CUALQ. ONDA → SUPERPOS. DE ONDAS PLANAS MONOCROMÁTICAS

→ NO SIEMPRE RESULTAN LAS MÁS CONV. DESDE EL PTO DE VISTA DE LA SIMETRÍA DEL PROBL.

2 EJ →


POR OTRO LADO, P/UNA DADA FREC., ∃ ∞ SOLUC. EN 3D → ONDAS PLANAS EN C/DIRECCIÓN

→ SI TENEMOS MUCHAS SOLUC. DE = FRECUENCIA (DEGENERADAS)

⇒ UNA COMB. DE ELLAS ES LA SOLUC. DE LA MISMA FREC.

BUSQUEMOS ENTONCES SOLUC. EN LAS CUALES LA SIMETRÍA DEL PROBL.

QUEDE EXPLICITADA → USO DE SIMETRÍAS

<u>ONDAS ESF:</u>

SUP. $\psi(\vec r,t) = \underbrace{f(r)}_{\text{NO DEP. DE LA DIRECCIÓN}}\, e^{\overbrace{i(\omega t - kr)}^{\varphi(r)}}$

$\vec r = r\hat r$

FUENTE

POR CONSTRUCCIÓN VEMOS Q' EL FRENTE DE ONDA (FASE CTE)

AVANZA CON $v = \frac{\omega}{k}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \overbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}^{f'}\frac{\partial r}{\partial x} e^{i\varphi(r)} + ikf\frac{\partial r}{\partial x} e^{i\varphi(r)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \left\{ f''\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + f'\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + ik\left[f\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2f'\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right] - k^2 f\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

$e^{i\varphi(r)}$

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\qquad \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1 - \frac{x^2}{r^2}}{r}$$

CON TODAS ESTAS ECUACIONES SE OBTIENE UNA EC. DIFERENCIAL PARA $f$:

$$\frac{2f'}{r} + f'' + i2k\left(f' + \frac{f}{r}\right) = 0$$

COMO ES UN COMPLEJO IGUALADO A CERO $\Rightarrow$ TANTO Re COMO Im DEBEN SER CERO

$$\Rightarrow \frac{df}{dr} + \frac{f}{r} = 0 \longrightarrow \frac{df}{r} = -\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow f(r) = \frac{A}{r} \quad (\text{VERIFICARSE LA } Re = 0 \text{ TB})$$

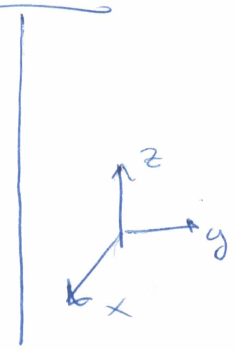
$$\Rightarrow \psi = \frac{A}{r} e^{i(wt - kr)}$$

LA AMPLITUD DECAE COMO $\frac{1}{r}$

LA INTENSIDAD $\propto$ ENERGÍA $\propto$ (AMPLITUD)$^2$ $\Rightarrow$ DECAE COMO $\frac{1}{r^2}$

LO CUAL ES LÓGICO DADO QUE EL ÁREA DEL FRENTE DE ONDA CRECE COMO $4\pi r^2$ $\Rightarrow$ LA POTENCIA $(E/t)$ TRANSMITIDA POR LA ONDA SE MANTIENE cte AL PROPAGARSE $\rightarrow$ LÓGICO PUES NO HAY NINGÚN TÉRMINO DISIPATIVO.

# ONDAS CILÍNDRICAS




FUENTE: TODOS LOS PUNTOS EMITEN EN FASE

⇒ $\psi$ sólo puede depender de la distancia hasta el hilo en la dir. $\perp$ al mismo

Uno podría hacer el clásico de simetría p/ mostrarlo por ej. girar alr. del eje y ver que la distrib. no puede dep. de ese giro o subirlo y bajarlo (mucho menos q' su long. a la q' suponemos $\infty$) y ver q' la distrib. no cambia ⇒ sólo puede dep. de r

⇒ Def $\rho^2 = x^2 + y^2 \longrightarrow$ radio polar

$$\Rightarrow \psi = f(\rho)\, e^{i(\omega t - k\rho)}$$

En este caso aprox. la solución usando lo q' vimos p/ ondas esféricas

En este probl. el área aumenta como la sup. cilíndrica, o sea como $2\pi\rho$ (alt. = cte), eso quiere decir q' la energía debe disminuir como $\frac{1}{\rho}$. Por lo tanto la amplitud decae como $\frac{A}{\rho^{1/2}}$

$$\Rightarrow \psi = \frac{A}{\rho^{1/2}}\, e^{i(\omega t - k\rho)}$$

Si reemp. en la ec. de ondas, se obt.

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t} = \frac{\psi}{\rho^2} \xrightarrow[\rho \to \infty]{} 0$$

verifiquen

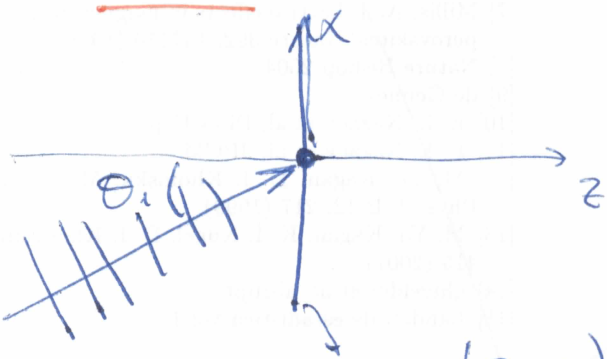
$\nabla^2$ en coord. cilíndricas

Generalmente se toma $\rho \gg \lambda$

# Ley de Snell

Punto de vista ondulatorio:

Una onda plana incide sobre una superficie que separa 2 medios transparentes ($M_1$ y $M_2$)




Hipótesis → la onda refl. y transm. son ondas planas

Analizo en $z=0$

$$\psi_{inc}(x,y,z,t) = A e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

(Sup. la onda en el plano $xz$ ⇒ $k_y = 0$)

en $z=0$ → $\psi(x,y,z=0,t) = A e^{i(\omega t - k_x x)}$ (i)

⇒ Dada la relac. de dispersión $k$ y $\omega$, se cumple:

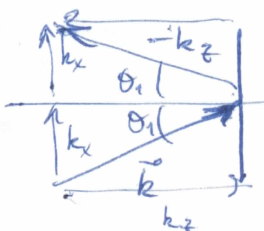
(ii) $k_z = \pm\sqrt{k^2 - k_x^2}$ ($k_y = 0$)

Esto quiere decir que (dados $\omega$, $k_x$ y $k_y=0$) hay 2 ondas que cumplen (i) e (ii) → una con "+" y otra con "−" en $k_z$

El "−" en $k_z$ indica que se propaga a la izq. ⇒ es algo como la onda reflejada → analogía con cuerdas

⇒ $\omega$ = p/las 2 ⇒ $k_x$ tb es igual

⇒




Reflexión especular

La onda reflejada forma el "mismo" ángulo respecto de la normal que la incidente

A la derecha de $z=0$ ⟶ ondas transmitidas

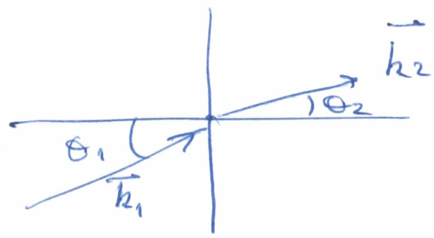
$$\Rightarrow \Psi_1(x,y,0^-,t) = A\, e^{i(\omega t - k_{1x} x)} \quad \text{— inm. antes}$$

$$\Psi_2(x,y,0^+,t) = A_t\, e^{i(\omega t - k_{1x} x)} \quad \text{— inm. después}$$

Pero además, con gral. $\Psi_2 = B\, e^{i(\omega t - k_{2x} x)}$

~~para que se mantenga~~

$$\Rightarrow \quad k_{1x} = k_{2x}$$



o lo q' es lo mismo

$$k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$$

~~Para q' la ec. en z=0~~ la cond. de contorno $\forall t$ exige q' $\omega$ sea igual de ambos lados, entonces uso q' $k_i = \frac{\omega}{c} n_i$ $\quad \frac{1}{v_i}$

$$\Rightarrow \boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$$

↓

Ley de Snell

En realidad $n$ depende de $\omega$, pero para explicarlo se debe recurrir a la teo. EM ⟶ FT1

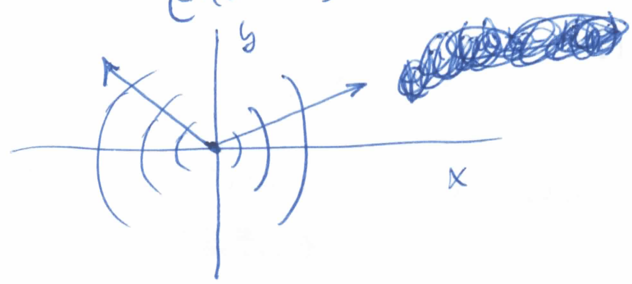
# Aproximación Paraxial

Muchos casos → analizar ondas cerca de un eje de referencia ó simetría

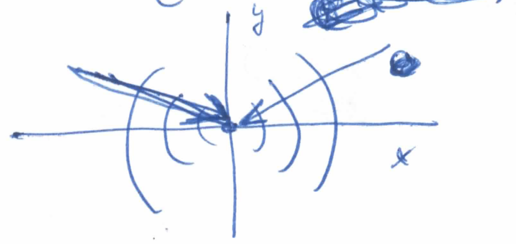
Típico caso → luz en sist. ópticos

Sup. ondas esf. cerca de una fuente ó sumidero

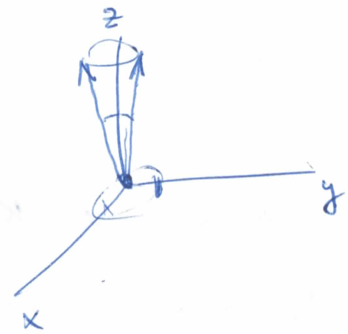
$e^{i(\omega t - kr)}$




$e^{i(\omega t + kr)}$




Suponemos una onda que se propaga de esta forma muy cerca del eje z, una forma de decir esto es




Como cumple la ec. de una esfera $(x^2+y^2+z^2 = cte)$

$\longrightarrow x^2+y^2 << z^2$

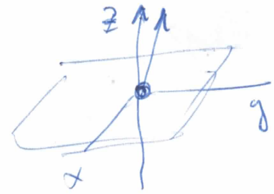
O sea q' para un z elegido x e y son pequeños siempre.

$$\Rightarrow r = \sqrt{\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2 << z^2} + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2} = |z|\sqrt{1+\frac{\rho^2}{z^2}}$$

$$\Rightarrow r \approx |z|\left(1 + \frac{\rho^2}{2z^2}\right) = |z| + \frac{\rho^2}{2|z|}$$

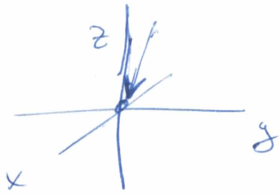
Con esa aprox., para una onda que avanza hacia +z:

$$\psi \simeq \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kz)} e^{-ik\rho^2/2z}$$




y para una en -z:

$$\psi \simeq \frac{A}{r} e^{i(\omega t + kz)} e^{ik\rho^2/2z}$$




(el signo del kz da el sentido)

Notar q' tenemos una onda esférica mult. por un $e^{-ik\rho^2/2R}$ con $R = z$ si la onda "sale" ó $R = -z$ si la onda "entra"

$\boxed{\text{~~Converge~~ Diverge}}$ $\boxed{\text{~~Diverge~~ Converge}}$

Por otro lado, veamos un poco más la aprox. a mayor orden

$$r \simeq z + \frac{\rho^2}{2z} - \frac{\rho^4}{8z^3} \dots$$

Como $r$ aparece en la fase mult. x $k$ uno debe tener en cuenta además, que la corrección en la fase debe ser despreciable para que la aprox. sea válida. Es decir, si la fase ~~...~~ completa vale $100000\pi$, una corrección en $\pi$, aunque muy pequeña, es catastrófica, pues $\psi$ cambia de signo.

$\Rightarrow$ tengo q' pedir que $\frac{k\rho^4}{8z^3} \ll \pi$

ó $\rho^4 \ll 4\lambda z^3$  además de $\rho^2 \ll z^2$