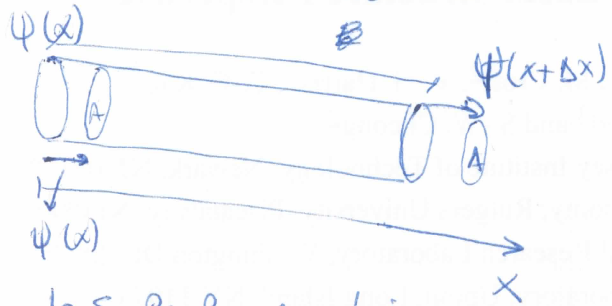
Ondas de Presión en un Fluido – Sonido

Este es otro caso de ondas long.



x es c/ punto del tubo

Las prop. mecánicas del fluido las caracterizamos mediante su densidad $\rho = \frac{M}{V}$ y la presión.

Al producirse una ΔP, la densidad tb. cambiará con el desplaz. Se producirá un cambio de volumen, siendo el V final

$$V = A\Delta x + \underbrace{A\left(\psi(x+\Delta x) - \psi(x)\right)}_{\Delta V = A\Delta\psi}$$

$$P_0 \text{ y } \rho_0 \equiv P \text{ y } \rho \text{ en eq.}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} P = P_0 + P_s \\ \rho = \rho_0 + \rho_s \end{cases}\right\} S \equiv \text{sonido}$$

P/la pert. de la densidad igualamos la masa en el V inicial con la masa en el V final

$$\rho_0 \cancel{A\Delta x} = \rho A\Delta x + \rho A\Delta\psi = \cancel{\rho_0 A\Delta x} + \rho_s A\Delta x + \rho_0 A\Delta\psi + \underbrace{\rho_s A\Delta\psi}$$

2º orden en la pert.
↓
al div. por Δx y hacer Δx → 0 se anula

→ Notar q' si el tramo se alarga ⇒ ρ disminuye ✓

$$\rho_s = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \Delta x \to 0$$

Relac. la pert. en ρ con la pert. en la posición

← Destaca visible hasta el fin de la pág. sig. → donde dice HASTA ACÁ

Por otro lado, ~~[illegible] Newton nos dice que~~ las fuerzas sobre el tramo, dadas por la presión en los extremos resulta

$$F = A\left(P(x) - P(x+\Delta x)\right) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} -A\,\Delta x\,\frac{\partial P_s}{\partial x}$$

Verificarlo

(Sup. P. uniforme) El signo negativo indica q' si P crece hacia la derecha ⇒ la F. es negativa.

⇒

La ec. de Newton queda:

$$\rho_0 A \Delta x\,\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -A\,\Delta x\,\frac{\partial P_s}{\partial x}$$

Falta asoc. P con ρ y juntar todo p/obt. una ec. p/ψ

En gral: $P(\rho) = P_0 + P_s = P_0 + \frac{\partial P}{\partial \rho}\rho_s + \ldots \cong P_0 + K\rho_s$

(en serie si hay variac. de ρ) (mayor orden)

K está relacionado con la compresibilidad del fluido (cuánto varía P al variar ρ) ~~su inversa [illegible]~~

$$\Rightarrow \frac{\partial P_s}{\partial x} = K\frac{\partial \rho_s}{\partial x} = -K\rho_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$\boxed{\text{HASTA ACA}}$

Juntando todo:

$$\boxed{\cancel{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = K \cancel{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}$$

Recuperando la ec. de ondas clásica.

Esta misma ec. la satisfacen P_s y ρ_s

Nombre $K = K\rho$ = módulo de compresibilidad
ó " volumétrico de "

Su inversa es la compresibilidad del fluido.

<u>Caso gas ideal</u>

1 - Para una variación lenta se aplica la ec. de estado del G. i.
y se llega a $K = \frac{P}{\rho}$ → va a ser c^2

2 - Para una variac. rápida y sin calor intercamb. con el medio → $PV^\gamma = cte$ $\Rightarrow K = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$

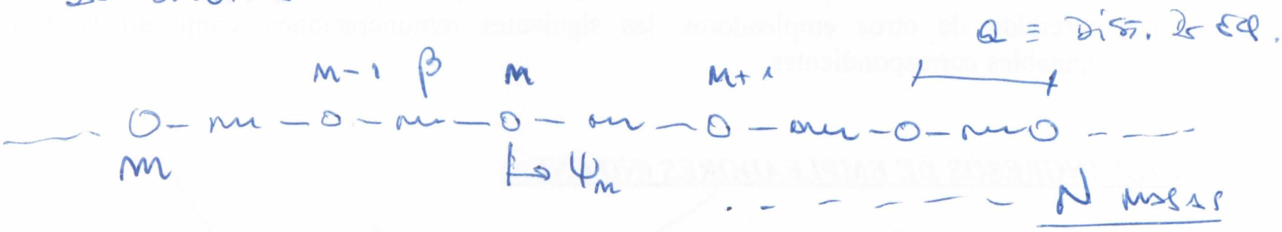
⇒ c sale con una modif.

En part., p/el sonido (f entre 100 Hz y 20.000 Hz)
funciona el caso 2 con $\gamma \approx 1,4$

Ondas en sist. discretos periódicos

Sea un sist discreto cuyas partes se ordenan como un sist. periódico (sólidos cristalinos)

La simetría ya no es "continua", pero la periodicidad discreta hace que las traslaciones finitas sean una operación de simetría



Notar que pueden haber ondas similares a las obs. en el resorte (longitudinales)

Ec. de Newton $m \dfrac{d^2\psi_n}{dt^2} = \beta(\psi_{n+1} - \psi_n) - \beta(\psi_n - \psi_{n-1})$

$$m \frac{d^2\psi_n}{dt^2} = \beta\left(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n\right) \qquad \text{N ec. acopladas}$$

Buscamos los modos normales de este sistema de N grados de libertad.

Para esto planteamos que las soluciones van a ser sinusoidales centradas en c/punto. En la cuerda usábamos x como rótulo, acá el índice "n" cumple esta función (caso intermedio entre cuerda y "pocos" grados de libertad)

$$\Rightarrow \psi_n = A_n e^{i\omega t}, \quad \text{con } A_n = f(x_n)$$

Notar que $x_n = na$

REEMP. EN LA EC.

$$m\,\omega^2 A_m = -\beta\left(A_{m+1} + A_{m-1} - 2A_m\right)$$

VAMOS A HACER UNA ANALOGÍA CON LA CUERDA Y PLANTEAR QUE LA COORD. ESPACIAL TAMBIÉN VARÍA SINUSOIDALMENTE. ESTO ES RAZONABLE, DADO QUE EN EL LÍMITE DE $a \to 0$ ESTO ES UNA CUERDA.

$$\Rightarrow f(x_m) = A e^{ikx_m} = A e^{ikma}$$

$$\Rightarrow m\,\omega^2 \cancel{A} e^{ikma} = -\beta \cancel{A}\left(e^{ik(m+1)a} + e^{ik(m-1)a} - 2e^{ikma}\right)$$

$$\Rightarrow m\,\omega^2 \cancel{e^{ikma}} = -\beta \cancel{e^{ikma}}\left(e^{ika} + e^{-ika} - 2\right)$$

$$\Rightarrow m\,\omega^2 = 2\beta\left(1 - \cos(ka)\right)$$

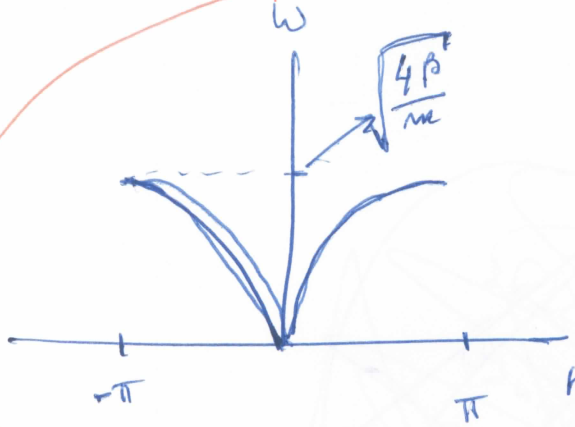
$$ó \quad \boxed{\omega^2 = \frac{4\beta}{m}\,\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \quad \text{RELAC. DE DISP.}$$

TOMANDO PARTE REAL, LA SOLUCIÓN QUEDARÁ ENTONCES

$$\varphi_m(t) = A\cos\left(kam + \varphi\right)\cos\left(\omega \cdot t + \varphi_t\right)$$

Notar que cada vez que k aumenta en $n\frac{2\pi}{a}$, se repite la solución ⇒ estaríamos repitiendo la solución

⇒ podemos seleccionar un intervalo en donde estén representadas todas las frecuencias posibles dadas por la relac. de disp.



→ En este intervalo están todas las frecuencias de los modos normales ⇒ No tiene sentido graficar fuera.

Un detalle no menor es el tema de las cond. de contorno. Si tenemos N masas, nos falta decir cuál va a ser el comp. de la 1 y la N, ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ como ya escribimos las ec. de Newt. y son = p/todas las m ⇒ lo mejor sería dar alguna condición q' conserve esta idea ⇒ Prop. cond. borde periódicas (el sist. → ∞, perdemos la noción de extremo)

$$\Rightarrow \psi_0 = \psi_N \rightarrow e^{ika\cdot 0}\cancel{e^{i\omega t}} = e^{ikNa}\cancel{e^{i\omega t}}$$

uso complejo ó coseno

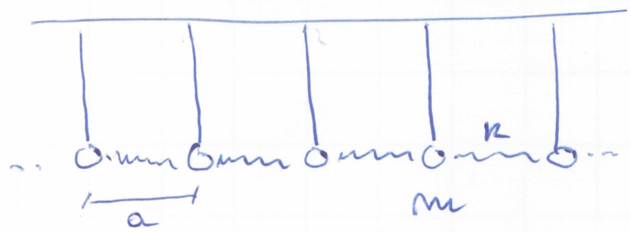
sólo cambió el ángulo

$$\Rightarrow 1 = e^{ikNa} \Rightarrow kNa = m2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{k_m = m\frac{2\pi}{\underbrace{Na}_{L}}}$$

→ Variable discreta, pero si N es grande es casi continua (~~[illegible]~~ Δk)

OTRO EJEMPLO:



ESTUDIAMOS OSC. LONGITUDINALES

RECORD. MASAS ACOPLADAS y 2 PÉND. ACOPLADOS:

EJEMPLO, EC. DE MOV. SIMIL A N MASAS ACOPLADAS ~~[illegible]~~ y SOLUC.

- PÉND. ACOPL. → MENOR ω → MOV. "EN FASE"

EN ESTE CASO λ "ES ∞" $\Rightarrow$ $k=0$ y LA FREC. ES LA DEL PÉNDULO SIMPLE

TAMB. EN PÉND. ACOPLADOS → ω MÁX. → CONTIGUOS EN CONTRAFASE

$\Rightarrow$ LA EC., AGREGANDO LA F. CORRESPONDIENTE AL PÉNDULO:

$$m\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\frac{mg}{l}\psi_n + K\left(\psi_{n+1}+\psi_{n-1}-2\psi_n\right)$$

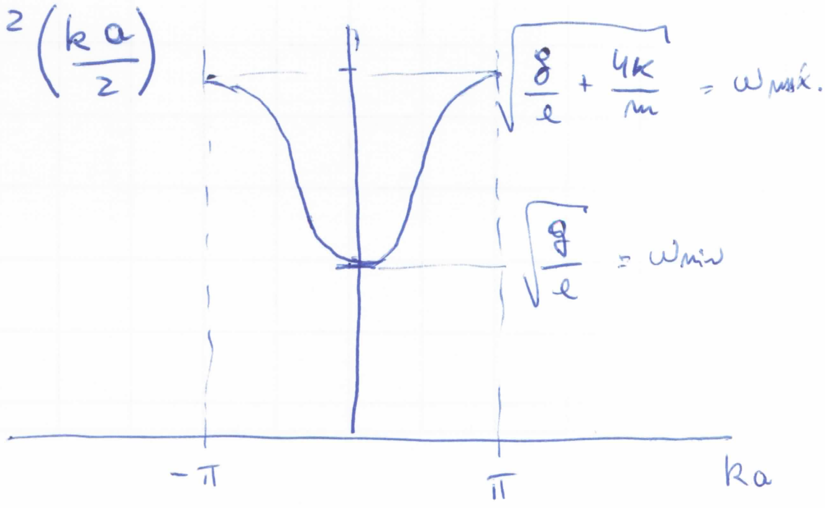
BUSCAMOS MODOS NORMALES → $\psi_n = A_n e^{i\omega t}$

el REEMP. → $-m\omega^2 A_n = -\frac{mg}{l}A_n - K\left(A_{n+1}+A_{n-1}-2A_n\right)$

PARA TENER LA MISMA PERIODICIDAD ESPACIAL PROPONGO $A_n = Ae^{ikan}$

QUE REEMP. EN LA EC. ANTERIOR RESULTA EN LA SIGUIENTE RELACIÓN DE DISPERSIÓN:

$$m\omega^2 = \frac{mg}{l} + 4K\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$



¿Qué ocurre $\omega > \omega_{máx}$ y $\omega < \omega_{mín}$?

↳ No hay soluciones como las propuestas

Si uno propone una solución no oscilante → $A_n = A e^{\pm k a n}$

Se pueden encontrar soluciones: períodos de = frec. pero con amplitud q' decae exponencialmente a lo largo del sist. → ondas evanescentes.

Límite al continuo - Ec. de Klein-Gordon

si $ka \ll 1$ ⇒ ~~la dif. entre~~ la long. de onda $\left(\lambda \propto \frac{1}{k}\right)$ es mucho mayor que la separación entre masas (a) → continuo.

En ese caso la relación de disp. queda:

masas acopl.)
$$\omega^2 = \frac{4K}{m}\,\text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \simeq \frac{4K}{m}\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{Ka}{m/a}\cdot k^2 \quad \text{(I)}$$

Pend. acopl.)
$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\,\text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \simeq \frac{g}{l} + \frac{4K}{m}\left(\frac{ka}{2}\right)^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka}{m/a}\cdot k^2 \quad \text{(II)}$$

(I) → ver Martínez, secc. 4.1 → Resorte continuo

(II) → $\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$

↳ relac. de disp. ≠ (Klein-Gordon)

Si buscamos la ec. de ondas de la cual surge esta relación

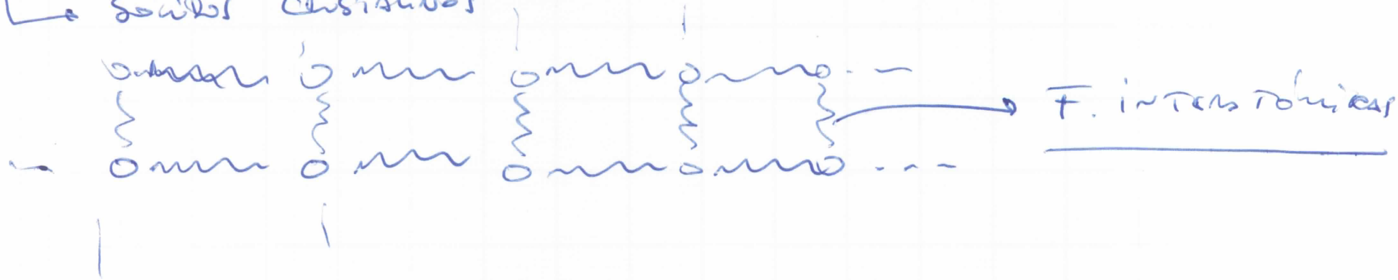
$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2\,\Psi(x,t) + c^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}} \quad \text{Ec. de Klein Gordon}$$

Ec. q' satisface una partícula relativista sin spin en mec. cuántica

~~Carácter paradigmático de~~

UN CASO PARADIGMÁTICO DE SISTEMAS PERIÓDICOS DISCRETOS

└ SÓLIDOS CRISTALINOS



* LOS ÁTOMOS OSCILARÁN SEGÚN LO VISTO. Y SUS VIBRAC. SERÁN SIMILARES A LAS DE UN SIST. DE MASAS ACOPLADAS COMO LAS Q' VIMOS. SÓLO Q' EN 3D (LAS 3 DIRECC. NO TIENEN X Q' SER IDÉNTICAS)

EN EL LÍMITE DE $\lambda \gg a$ $(ka \ll 1)$, LA RELAC. DE DISP. ES LINEAL, Y ESO CORRESPONDE A ONDAS SONORAS Q' SE DESPLAZAN EN UN CRISTAL.

* SI EN CAMBIO LAS MASAS TIENEN GRADOS DE LIB. INTERNOS (MOLÉCULAS) Y LAS VIBRACIONES AFECTAN ESOS GRADOS DE LIB. EL SIST. ES SÍMIL A PÉNDULOS ACOPLADOS (C/PÉNDULO TIENE 1 GR DE LIB. +) Y PARA $k=0$ SU ω NO ES CERO $\Rightarrow$ APARECEN ADEMÁS RAMAS DEBIDAS A ESTAS OSCILACIONES DEBIDAS A GRADOS DE LIBERTAD INTERNOS, QUE TÍPICAMENTE TIENEN MAYOR FRECUENCIA (EN PART., NO PASAN POR $\omega=0$, $k=0$)

LOS GRADOS DE LIB. INTERNOS APARECEN EN UN SÓLIDO Q' EN LUGAR DE ESTAR FORMADO POR UN SÓLO TIPO DE ÁTOMO (Fe, Cu), ESTÁ FORMADO POR UNA MOLÉCULA Fe_3O_4, CuO_2, ...

$\Rightarrow$ C/ UNIDAD Q' LO FORMA, TAMBIÉN PUEDE "VIBRAR"