GUÍAS

ONDAS PROPAGANTES

HASTA AHORA → SIST. CONFINADOS EN 2ND 1 COORD. OSCILA RESP. AL EQUILIBRIO

⇒ ARMAMOS LAS EC. (EN LA TEORÍA Q' CORRESP.: MECÁNICA, TERMO, ELECTRO, ETC.)

CON LAS APROX. NECESARIAS CON LA MENOR PÉRDIDA DE COMPLETITUD

- BUSCAMOS LOS MODOS NORMALES: $f \to (\omega)$ ALGO Q' TODAS LAS COORD. OSCILAN EN FASE Y LUEGO HALLAR LAS RELAC. ENTRE C/U DE LAS COORD. ("FORMA" DEL MODO). PARA CADA FRECUENCIA LA RELAC. ENTRE ω Y k → RELAC. DE DISPERSIÓN Q' ES CARACTERÍSTICA DE CADA SISTEMA

- RESTRINGIR LOS k SEGÚN LAS COND. DE BORDE

- SOL. GRAL = SUPERPOSICIÓN DE LOS MODOS NORMALES. CON COEF. Q' SALEN DE LAS COND. INICIALES.

EN REALIDAD:

ONDAS → ALGO Q' SE PROPAGA

LOS MODOS NORMALES → ONDAS ESTACIONARIAS PUES NO HAY PROPAGACIÓN

VEREMOS Q' LAS ONDAS ESTAC. PUEDEN ESCRIBIRSE EN TÉRMINOS DE UNA NUEVA BASE DE FUNCIONES EN LAS CUALES LA PROPAGACIÓN ESTÁ EXPLÍCITA.

Partimos de soluciones previas y tratamos de predecir (99)

P/ los modos normales planteamos

$$\psi(x,t) = f(x)\, e^{i\omega t}$$

y al reemp. en la ec. de ondas $\xrightarrow[\text{obt.}]{}$ $f(x) = e^{ikx}$

⇒ la solución era de la forma:

$$\psi(x,t) = A\cos(kx+\varphi_x)\cos(\omega t+\varphi_t)$$

Sin emb. podríamos mantener la soluc. compleja $\psi(x,t) = Ae^{ikx}e^{i\omega t} = Ae^{i(kx+\omega t)}$

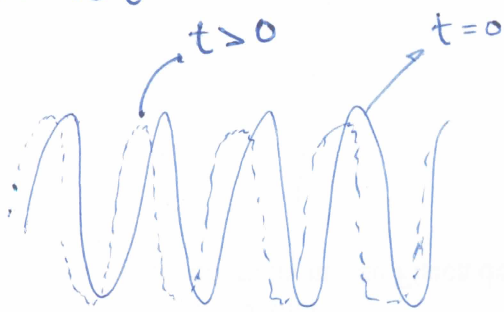
Cuya parte real es $\psi(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$

que no es un modo normal ya q' la fase dep. de x $(\varphi = kx)$

pero sí es solución de un sist. homogéneo como una cuerda.

Notar q' esta solución tiene la característica siguiente:

Al avanzar t, se repite la misma función de x, sólo q' corrida en ωt



A medida q' avanza t la función (su foto) se corre a la izquierda

o sea q' podemos decir que

$$\psi(x,t) = A\cos\left[k(x-x_0)\right] \quad ; \text{ con } x_0 = -\frac{\omega}{k}t$$

o sea q' la func. de ondas en t se desplaza a la izquierda con velocidad negativa $\left(-\frac{\omega}{k}\right)$.

$$c = \frac{\omega}{k}$$

⇒ tenemos una solución de la ec. de ondas que se propaga a la izq. con una veloc. determinada por la relac. de dispersión. Esta soluc. vale p/ [illegible] estudiado

Lo importante es q' el sist. sea homog. (invariante ante traslaciones) espacialmente

Velocidad de fase

Notar q' $f(x)$ puede ser $e^{\pm ikx}$, el signo no afecta a lo mencionado antes $\Rightarrow$ $\psi^{\pm}(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx)$

(+) : onda viajando a izquierda ; (−) : onda viajando a derecha

Podemos ver q'

$$\psi^{\pm}(x,t) = A\cos(\omega t \pm kx) = A\left[\cos(\omega t)\cos(kx) \mp \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(kx)\right] =$$

$\Rightarrow$ superpos. de 2 ondas estacionarias (lógica, toda soluc. puede expresarse como superpos. de modos normales) y como tienen frec.

~~Fija debe expresarse en términos de 2 ondas de = frec.~~

Lo "loco" es q' con 2 ondas estac. saco una propagante

Las ondas propagantes consideradas tienen un argumento o "fase"

$$\cos(\omega t \pm kx) = \varphi_0 \rightarrow x = \frac{\varphi_0}{k} \mp \frac{\omega}{k} t$$

que se propaga a $|v_f| = \dfrac{\omega}{k}$ → velocidad de la fase o "de fase"

Vale tb. la recíproca, las ondas estac. pueden expresarse como superposición de estas ondas propag. o viajeras, pues:

$$\psi^{+}(x,t) + \psi^{-}(x,t) = 2A\cos(\omega t)\cos(kx)$$

$$-\psi^{+}(x,t) + \psi^{-}(x,t) = 2A\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(kx)$$

Notar q' esto me va a llevar a que $\exists$ un conjunto de funciones de onda propagantes en función de las cuales puedo expresar cualquier $\psi(x,t)$

¿Qué se transporta? Energía y Potencia

(101)

En todos los casos de ondas mecánicas vimos q' la densidad de energía cinética y potencial se expresan como:

$$U_c = \frac{1}{2} C_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 \qquad U_p = \frac{1}{2} C_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2$$

C_c y C_p dependen de ψ y están relacionadas entre sí (en la cuerda $C_c = \rho$ y $C_p = T$)

Usando una de las soluc. mostradas previamente:

$$U_c = \frac{1}{2} C_c\, \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$U_p = \frac{1}{2} C_p\, k^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

Ambas energías "viajan juntas"

No se alternan en t ni x sino q' alcanzan su máximo al mismo t en c/posición. Además viajan a la misma veloc. de la onda.

Notar q' en el caso de la cuerda se cumple q'

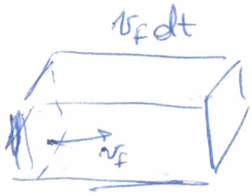
$$C_c \cdot \omega^2 = \rho\, \omega^2 = \rho\, c^2 k^2 = T k^2 = C_p k^2$$ y entonces

las 2 densidades de energía son iguales, esto pasa en general

Como la dens. de energía se desplaza a la velocidad v_f $\Rightarrow$ a través de un punto (superficie) de $x = cte$ atraviesa una potencia:

$$P = v_f\, U \quad \left(U = \frac{\Delta E}{\Delta x} \; ; \; v_f = \frac{\Delta x}{\Delta t} \right)$$

Toda la E a una distancia $dx = v_f\, dt$ atravesará la sup. en dt



Si U es densidad lineal ⇒ P es la potencia

(si fuera dens. volumétrica ⇒ P es la pot. q' atraviesa un área unitaria ⟶ densidad de la onda.)

Podemos calcular el promedio temporal de la potencia (detectores → Δt finito)

Por ej. p/luz $f \approx 10^{15}$ Hz y el ojo promedia $\approx \frac{1}{10}$ seg

⇒ se puede calcular el valor medio de la potencia recibida p/el ojo

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')\, dt'$$

$$\langle sen^2 \rangle = \frac{1}{2}$$

Si la transmisión de pot ocurre en todas las direcciones (sonido, luz)

⇒ se usa la intensidad, pot. transmitida a través de un área ΔA cuando ese área tiende a cero ⟶ $I = \frac{dP}{dA}$

oído → muy sensible (12 órdenes de magn. en intensidad)

⇒ se usa el log:

$$I\,[db] = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{siendo} \quad I_0 = 1\, \frac{\mu W}{cm^2} = 10\, \frac{erg}{cm^2\, seg}$$

que es una intensidad típica de una persona hablando normal al oído

A 440 Hz un oído detecta entre - 100 db y 20 db el rango cambia (es menor) a otras frec. audibles, que van de $\approx$ 100 Hz a 10 ó 20kHz

Condiciones de borde - Reflexión de ondas

Ondas estac. $\longrightarrow$ al tener sus coordenadas en fase pero con $\neq$ amplitud es sencillo ver qué ocurre al poner condiciones de borde fijo ó móvil

Ondas viajeras $\longrightarrow$ la oscilación "repite la forma" en $\neq$ posic. a $\neq t$

Veamos q' ocurre con cond. de borde fijo.

$$\psi(\overset{0}{x},t) = 0$$

La onda viajera $\psi^-(x,t) = A e^{i(\omega t - kx)} + c.c.$

↳ está claro q' no puede cumplirlo, sin embargo, si superponemos esta onda con una viajando a la izquierda con $= A$ pero de signo opuesto $\Rightarrow$ esa superposición se anula en $x = 0$

Una forma de verlo es: la onda q' incide desde la izquierda en $x=0$, se refleja sobre su camino, no hay probl. antes ni desp. de la reflexión, sólo en ese punto y tiempo.

¿Cómo es entonces la solución?

Agrego $\psi^+(x,t) = B e^{i(\omega t + kx)} + c.c.$

y busco B tq en el borde $\psi^- + \psi^+ = 0$

$$\Rightarrow \psi^+(x=0,t) + \psi^-(x=0,t) = 0 \Rightarrow A e^{i\omega t} + B e^{i\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow A + B = 0 \quad \text{ó} \quad \boxed{R = \frac{B}{A} = -1}$$

Coef. de reflexión

→ Dado q' el coef es real y negativo, la onda se refleja con una dif. de fase en π

OTRO CASO → DISCONTINUIDAD EN UNA CUERDA

SUP. UNA CUERDA Q' CAMBIA SU DENSIDAD LINEAL EN $x=0$ Y UNA ONDA VIAJERA DE AMPLITUD A INCIDE DESDE LA IZQUIERDA.

COMO ES UN SIST. MECÁNICO, LA COND. DE BORDE SURGE DE LAS EC. DINÁMICAS: EL TRAMO DE LA IZQ. HACE FZA. SOBRE EL DE LA DERECHA IGUAL Y CONTRARIO A LA Q' EL TRAMO (VICEVERSA).

LA ONDA, POR SU PARTE, TENDRÁ Q' PROPAGARSE EN C/LADO SIGUIENDO LA EC. DE ONDAS CORRESP. (PUES DEPENDE DE T Y ρ Q' DEPENDEN DEL TRAMO) O LO QUE ES LO MISMO, CON LA RELAC. DE DISP. QUE CORRESPONDA.

1º CONDIC.: SI $x=0$ OSCILA CON ω DEBIDO A LA ONDA INCIDENTE ⇒ LA ONDA A LA DERECHA (TRANSMITIDA) DEBERÁ OSC. A LA MISMA ω.

ES COMO UN FORZADO

2º COND.: SI $x=0$ NO ESTÁ FIJO ⇒ HAY ONDA TRANSMITIDA

SI PLANTEAMOS Q' NO HAY ONDA REFLEJADA ⇒ LOS 2 TRAMOS DEBERÍAN SER IGUALES (VER MARTÍNEZ P. 97)

⇒ LA CONDICIÓN COMPLETA ES:

$$\underbrace{\psi_I^-(x=0,t)}_{\text{inc.}} + \underbrace{\psi_{II}^+(x=0,t)}_{\text{ref.}} = \underbrace{\psi_D^-(x=0,t)}_{\text{trans.}}$$

CON $\psi_I^-(x,t) = A\,e^{i(\omega t - k_I x)}$ $\qquad \psi_D^-(x,t) = C\,e^{i(\omega t - k_D x)}$

$\psi_I^+(x,t) = B\,e^{i(\omega t + k_I x)}$

$F = T_0 \operatorname{tg}\theta$
$\partial\psi$

~~$F_{I/D} = -F_D$~~

$$\Rightarrow A + B = C$$

ws $F_y = T_0 \,\text{sen}\, \theta \approx T_0 \,\text{tg}\, \theta \approx T_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad F_{I/D} = -T_0 \left(-i k_I A + i k_I B\right) e^{i\omega t}$$

$$F_{D/I} = T_0 \left(-i k_D C\right) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad k_I (A-B) = k_D C$$

Con lo q' resulta $\longrightarrow$ $k_I (A-B) = k_D (A+B)$

y entonces $R = \dfrac{B}{A} = \dfrac{k_I - k_D}{k_I + k_D}$ para la onda reflejada

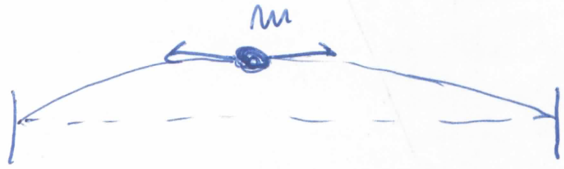
y $T = \dfrac{C}{A} = 1 + R = \dfrac{2 k_I}{(k_I + k_D)}$ p/la transmitida

Estos coef. pueden escribirse usando la relac. de dispersión, por ej. en el caso de la cuerda: $\omega = v_f k$

$$\Rightarrow \quad R = \frac{v_{f_D} - v_{f_I}}{v_{fD} + v_{f_I}} \quad ; \quad T = \frac{2 v_{fD}}{v_{fD} + v_{f_I}}$$

MÁS EJEMPLOS DE REFLEXIÓN

CUERDA CON UNA CUENTA



R y T SALEN DE APLICAR NEWTON EN LAS DISCONT.

AQUÍ USAMOS Q' LA F ~~...~~ SOBRE LA MASA ES IGUAL A m a

$$\Rightarrow F_y = -T_0 \frac{\partial \psi_I}{\partial x} + T_0 \frac{\partial \psi_D}{\partial x} = m \frac{\partial^2 \psi_D}{\partial t^2}$$

POR R y T SABEMOS Q'

$$\left.\begin{aligned} \psi_I^+(x_0=0,t) &= R\,\psi_I^-(x=0,t) \\ \psi_D^-(x=0,t) &= T\,\psi_I^-(x=0,t) \end{aligned}\right\} \text{POR DEF.}$$

y $T+R=1$

$A e^{i(\omega t - k_I x)}$

USANDO TODO ESTO y LAS DEF. DE ψ_I^-, ψ_I^+, ψ_D^-

LLEGO A:

DE LA EC. DE NEWTON $\longrightarrow$ $i T_0 \left[k_I (1-R) - k_D T \right] = -m\omega^2 T$

RELAC. DE DISPERSIÓN

NO CONFUNDIR T_0 = TENSIÓN CON T = COEF. DE TRANSMISIÓN

y $T+R=1$ QUEDA $\quad R = \dfrac{i(k_I - k_D) + m\omega^2/T_0}{i(k_I + k_D) - m\omega^2/T_0}$

Para el caso part. en q' a ambos lados tengo la "misma" cuerda ⇒ $k_I = k_D$ y en func. de v_f:

$$R = \frac{-1}{\left(1 - i\,\frac{2T}{v_f\, m\, \omega}\right)}$$

⇒ Hay reflexión debido a la cuenta y tanto la amplitud como la fase de la onda reflejada dependen de la frecuencia (pues R es complejo).

Si $m \longrightarrow 0 \Rightarrow R \rightarrow 0$ (lógico)

y si m se hace $m \longrightarrow \infty \Rightarrow R = -1$ y todo se refleja

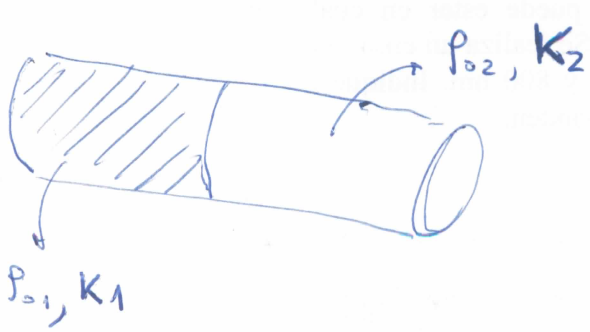
Notar q' a $>$ ω, más sensible es la onda a la presencia de la cuenta.

Otro caso ⟶ Sonido

En la cuerda los parámetros son densidad y tensión y pusimos la discontinuidad en la densidad.

P/introducir una discont. en T_0 hubiera sido más complicado

En el caso del sonido hay 2 parámetros también ⟶ densidad volumétrica (ρ)
↘ coef. de compresibilidad



$$K_i = \frac{\partial P}{\partial \rho}\cdot \rho_0$$

$$\kappa = \frac{\partial P}{\partial \rho}\ ;$$

$$K = \kappa\, \rho_0$$

$$\Rightarrow P = \frac{K\,\rho}{\rho_0}$$

↳ norm. a ρ a ρ_0

SUPONDREMOS UNA DISCONTINUIDAD "PERFECTA" Y "PLANA"

$$\Rightarrow \quad \Psi_1(x=0,t) = \Psi_2(x=0,t)$$

Y ADEMÁS, DEL EQUILIBRIO TERMODINÁMICO $P_1 = P_2$

RECORDEMOS DE $P = K \dfrac{\rho}{\rho_0}$ (GAS IDEAL)

$\rho_0 \rightarrow$ DENSIDAD A P_0 (VALOR DE EQUILIBRIO)

$$, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{K}{\rho_0}}_{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

Y ADEMÁS $\rho = -\rho_0 \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ (REVISAR EN SONIDO)

{ SON ONDAS LONG. $\Rightarrow$ SI EL "DESPLAZ." DADA POR LA PERTURBACIÓN (Ψ) ES POSITIVO (DE ABAJO A LA DERECHA) $\Rightarrow$ LA DENSIDAD DISMINUYE

COMO $T = 1 + R$

Y OTRA VEZ, USANDO QUE $\Psi_1^{+}(x=0,t) = R\, \Psi_1^{-}(x=0,t)$

Y QUE $\Psi_2^{-}(x=0,t) = T\, \Psi_1^{-}(x=0,t)$ Y LAS DEF. DE $\Psi_1^-, \Psi_2^-, \Psi_1^+$

$$\Rightarrow \quad \Psi_1^{-}(x=0,t) + \Psi_1^{+}(x=0,t) = \Psi_2^{-}(x=0,t) \quad \text{CONTINUIDAD}$$

SALTAR

VER

SE DEFINE $Z = \sqrt{K\rho_0} = \sqrt{K'}$ = IMPEDANCIA DEL MEDIO

EN ESOS TÉRMINOS $R = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ Y $T = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

SI LOS 2 MEDIOS TIENEN IGUAL IMPEDANCIA $\Rightarrow$ NO HAY REFLEXIÓN Y TODO ES TRANSMISIÓN

Se resuelve similar a una cuerda, pero el término

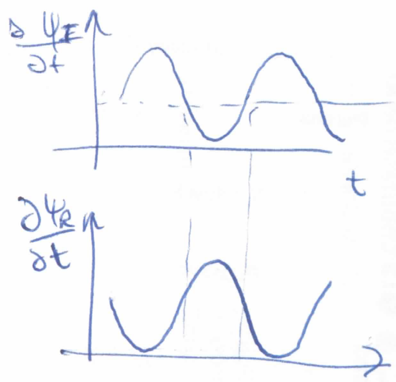
$-T\frac{\partial \psi}{\partial y}$ se cambió por $-K\rho_0\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Casos part.: Cond. de contorno p/ sonido

Tubo extremo cerrado:

la veloc. en la direcc. del tubo es cero siempre

⇒ la velocidad debe reflejarse con $R = -1$ ($\frac{\partial \psi}{\partial t}$ también es ondulatoria, como ψ) así se anula



→ se anulan p/ todo t (lo mismo q' $\psi(x,t)$ desplaz)

en x = pared

~~∂ψ también~~ Pero la "fuerza restauradora", q' es proporcional a − (desplaz.) va a tener un coef. de reflexión positivo. ⇒ la presión se duplica

micróscópicamente: una moléc. se refleja y cambia su cant. de mov. de p_0 a $-p_0$ ⇒ $\Delta p_{molécula} = -2p_0$ y entonces se la transfiere (en el t q' dura el choque) $\Delta p_{pared} = 2p_0$

la fza es $\frac{\Delta p_{pared}}{\Delta t}$ y P es $\frac{Fza}{Área}$ ⇒ ✓

EXTREMO ABIERTO:

ASÍ FUNCIONA ALR. DE P_0

P_0

LA V. EN EL EXT. NO ES CERO.

LA ENTRADA A LA HABITACIÓN (SALIDA DEL TUBO) NO OFRECE RESISTENCIA

$\Rightarrow$ $Z_{\text{salida}} = 0$ $\longrightarrow$ CORRIMIENTO EFECTIVO DEL BORDE DEL TUBO $\longrightarrow$ ~~EL~~ EL AIRE ENCUENTRA CIERTA RESISTENCIA A SALIR

$\longrightarrow$ EXP. $\equiv$ DET. ~~LA~~ FRECUENCIA HACIENDO RESONAR EL TUBO Y CONV. EN LONG. DE ONDA. $\longrightarrow$ ~~LA~~ LEVEMENTE MAYOR A LA DEL TUBO.

ONDAS CON PÉRDIDAS:

VIMOS Q' SE PUEDE PLANTEAR UNA VERSIÓN SIMPLE DE UNA ONDA CON PÉRDIDAS COMO:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

PROPONEMOS UNA SOLUCIÓN PROPAGANTE AL IGUAL QUE EN LOS CASOS ANTERIORES:

$$\psi(x,t) = A e^{i(\omega t + kx)}$$ (ES LA MISMA FORMA PLANTEADA ANTES)

Y REEMP. EN LA EC. DE ONDA OBTENEMOS

$$\omega^2 - i\gamma\omega = c^2 k^2$$

LA ÚNICA DIF. RESPECTO A LO Q' VIMOS EN ESE CASO SON LAS COND. DE BORDE ~~...~~.