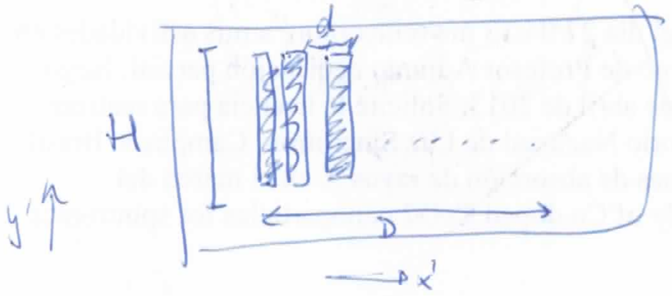
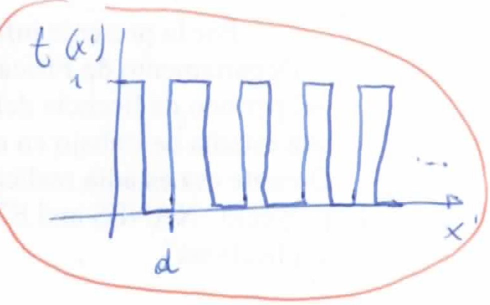
Difracción por objetos periódicos

Diapositiva rayada → Red. de difracción

Cómo sería el $t(x')$



→



$d \simeq 0{,}01 - 0{,}1$ mm

Si obs. a $\simeq 1$ m → serie de máximos equiespaciados

Otro dispos. con d' → separación máximos $\propto \frac{1}{d}$

Esto es similar a N fuentes q' interfieren → c/ ranura actúa como una fuente

↳ Dif. → fuentes no puntuales

P/ análiz. cuantit. → aprox. campo lejano → $D^2 << \lambda r$

Obs q' se cumple casi al límite si pensamos en una diapositiva real

$D \simeq 0{,}5$ mm , $\lambda \simeq 0{,}7\,\mu m$ (700 nm) y $r \simeq 2$ m

$$\lambda \cdot r = 1400\ nm \times m = 1400 \times 10^{-9}\ m^2 = 1{,}4 \times 10^{-6}\ m^2$$

$$D^2 = 0{,}25\ mm^2 = 0{,}25 \times 10^{-6}\ m^2$$

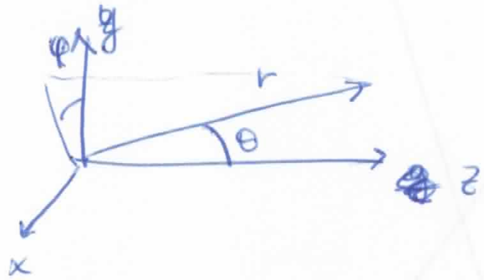
EL PROBLEMA ES AHORA RESOLVER LA INTEGRAL DE KIRCHHOFF PARA N RENDIJAS, PERO DEFINIR EL $t(x')$ LA CUENTA QUEDA REPLICADA IGUAL P/CADA OBSTÁCULO:

$$\Psi(\vec{r},t) = -\frac{1}{2\pi\lambda}\,\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\,S(\theta,\varphi)$$

(SIEMPRE Q' VALGA CAMPO LEJANO ⇒ D "CHICO")

CON $$S(\theta,\varphi) = \frac{1+\cos\theta}{2}\iint_{S'} t(\vec{r}')\,\Psi_{inc}(\vec{r}')\,e^{ik(x'\sin\theta\cos\varphi + y'\sin\theta\sin\varphi)}\,dx'dy'$$

S' ↓ TODAS LAS RENDIJAS



LA DISPOS. → EN EL PLANO XY

SUPONGAMOS Q' ILUMINAMOS LA DISPOS. CON UNA ONDA PLANA CON INCIDENCIA NORMAL ($k_{0x} = k_{0y} = 0$)

$$\Rightarrow \Psi_{inc.}(\vec{r}') = A$$

ADEMÁS $$t(\vec{r}') = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le \frac{d}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{d}{2} \le x \le d \end{cases}$$

$$y \quad t(x'+d) = t(x')$$

RECORDAR Q' $$\frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$$

$$\frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi$$

con eso:

$$S(\theta,\varphi) = \frac{1+\cos\theta}{2} A \int_0^H e^{iky'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi} dy' \cdot$$

$\longrightarrow$ cte

$$\cdot \int_0^D t(x')\, e^{ikx'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi} dx' =$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{2} \frac{AH}{2} e^{i\frac{kHy}{2r}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kHy}{2r}\right)}{\left(\frac{kHy}{2r}\right)} \cdot I(x)$$

⊖ ⊕ ⊙

donde $I(x) = \displaystyle\int_0^D t(x')\, e^{ikx'\operatorname{sen}\theta\cos\varphi} dx' =$

$$= \int_0^D t(x')\, e^{ik\frac{xx'}{r}} dx'$$

Sería más obvio si $H \longrightarrow \infty$

⊕ es la difracción de una ranura en y

⊖ es una fase adic. por q' la ranura no está centrada en $y'=0$ sino en $y'=\frac{H}{2}$

$\rightarrow$ ya lo vimos

$\rightarrow$ la integral $I(x^p)$ es la q' contiene la info sobre la periodicidad en x'.

Nota q' esta integral se puede dividir en una para cada rendija iluminada, quedando: (interf. de N fuentes no puntuales)

$$I(x) = \int_0^d t(x') e^{i\frac{kxx'}{r}} dx' + \int_d^{2d} \cdots = \sum_{p=0}^{N-1} I_p(x)$$

$$I_p(x) = \int_{pd}^{(p+1)d} t(x') e^{i\frac{kxx'}{r}} dx' = \int_{pd}^{(p+1)d} t(x'-pd)\, e^{i\frac{kxx'}{r}} dx'$$

Si cambiamos ~~coordenadas~~ a $u = x' - pd$

$$\Rightarrow \text{para } c/p \quad I_p(x) = \int_0^d t(u)\, e^{i\frac{kx(u-pd)}{r}} du =$$

$$= e^{i\frac{kxpd}{r}} I_0(x)$$

siendo $$I_0(x) = \int_0^d t(u)\, e^{i\frac{kxu}{r}} dr$$ indep. de p.

la integral corresp. a una rendija de ancho $\frac{d}{2}$ centrada en $\frac{d}{4}$

a difracc. por

revisando resultados ant. $\longrightarrow$ $$I_0(x) = \frac{d}{2} e^{i\frac{kdx}{4r}} \frac{\sin\left(\frac{kdx}{4r}\right)}{\left(\frac{kdx}{4r}\right)}$$

Ver rendija rectangular

uso $$\sum_{j=0}^{N-1} x^j = \frac{x^N - 1}{x-1}$$

⇒ reemplazando

$$I(x) = I_0(x) \cdot \sum_{p=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{kxdp}{r}}\right) = I_0(x)\, e^{i\frac{kxd}{2r}\cdot N} \frac{\sin\left(\frac{kxd}{2r}\cdot N\right)}{\sin\left(\frac{kxd}{2r}\right)}$$

usar atrás ⊙

$$\Rightarrow \psi(\bar{r},t) = -\frac{1}{2\pi\lambda} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} S_0(\theta,\varphi)\, e^{i\left(\frac{kxd}{2r}\right)N} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{kxd}{2r}N\right)}{\sin\left(\frac{kxd}{2r}\right)}}$$

→ es S para I_0

Donde $S_0(\theta,\varphi)$ es el término de difracc. p/ una rendija de ancho $\frac{d}{2}$ y alt. H que queda mult. por ⊛, el patrón de interferencia de N fuentes (o sea, la interf. de N fuentes modulada por el patrón de difracción de una rendija).

La rendija tiene ancho $\frac{d}{2}$ ⇒ los mínimos estarán en

$$\sin\theta_m = \frac{2m\lambda}{d}$$

si $\sin\theta_m \simeq \theta \simeq \frac{x}{r}$ ⇒ $\frac{xdk}{2r} = 2\pi m$

Difracción

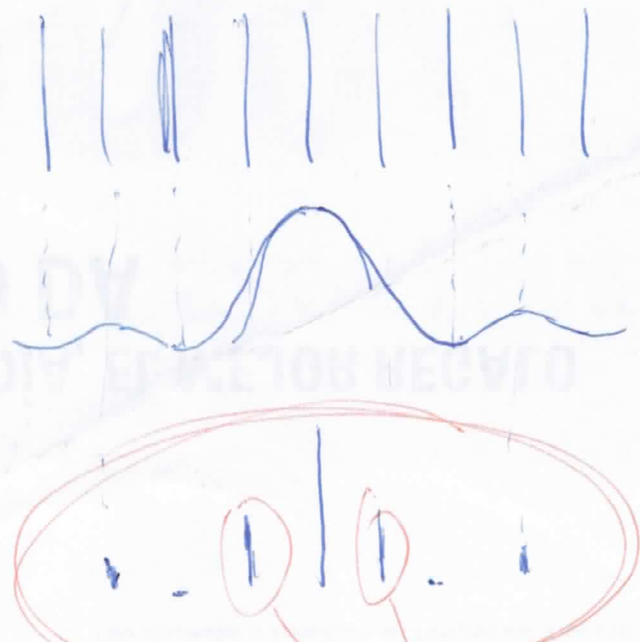
Las N fuentes q' interfieren están entre 0 y D $(D = Nd)$

y sus máximos (ppales) se ubican en.

$$\boxed{\frac{kxd}{2r} = m\pi}$$

Interferencia

⇒ los máximos pares no aparecerán y los otros irán atenuados por el patrón de difracción



Interf. N fuentes

Difracc. rendija

Patrón

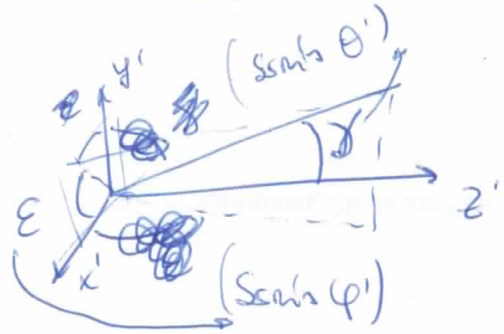
Notar q' podrían no verse así

VEAMOS EL CASO DE UNA ONDA PLANA INCIDIENDO EN UN ÁNGULO ARBITRARIO SOBRE LA DISPOSITIVO

$$\Rightarrow \psi_{inc}(\vec r') = A e^{-i\vec k_0 \vec r'} = A e^{-i(k_{0x} x' + k_{0y} y')}$$

$$y \quad t(\vec r') = t_y(y')\, t_x(x') \quad \text{con} \quad t(x'+d) = t(x')$$

$\vec k_0$ ES EL VECTOR DE PROP.

$\Rightarrow$ 

$$k_{0x} = k\,\mathrm{sen}\,\gamma \cos\varepsilon$$

$$k_{0y} = k\,\mathrm{sen}\,\gamma\,\mathrm{sen}\,\varepsilon$$

(GUARDAMOS P/DESPUÉS)

REPITIENDO EL ANÁLISIS PREVIO:

1 DENTRO
0 FUERA

$$S(\theta,\varphi) = \frac{(1+\cos\theta)}{2} A \int_0^H t_y(y')\, e^{i y'[k\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi - k_{0y}]}\, dy' \cdot \int_0^D t_x(x')\, e^{i x'[k\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi - k_{0x}]}\, dx'$$

$I(\theta,\varphi)$ = PARA ESTA INTEGRAL REPETIMOS EL TRUCO DE USAR LA PERIODICIDAD DE $t_x(x')$ Y LUEGO CAMBIAR VARIABLE

REVISAR

$$\Rightarrow I(\theta,\varphi) = \sum_{p=0}^{N-1} \int_{pd}^{(p+1)d} t_x(x')\, e^{i x'[k\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi - k_{0x}]}\, dx'$$

y cambiando a $u = x' - Pd$

$$I(\theta,\varphi) = \int_0^d t_x(u)\, e^{iu[k \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\varphi - k_{ox}]}\, du \cdot \sum_{P=0}^{N-1} e^{id[k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - k_{ox}]P}$$

Otra vez, la sumatoria representa la interf. de N fuentes, (ambas formando áng. γ con z' y ε con x') y la integral corresponde a la difracción por un objeto cuyo tamaño es el período de la rendija.

Reemplazando todo (resolviendo la sumatoria idem ant. y fijando $\varepsilon = 0$, $k_{oy} = 0$)

$$\psi(\bar{r},t) = -\frac{1}{2\pi\lambda}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \underbrace{S_0(\theta,\varphi)}_{\text{difracc.}} \underbrace{e^{id[k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - k_{ox}]\frac{N}{2}}}_{\text{fase}} .$$

$$\cdot \underbrace{\frac{\mathrm{sen}\left[d\left(k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - k_{ox}\right)\frac{N}{2}\right]}{\mathrm{sen}\left[d\left(k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - k_{ox}\right)\right]}}_{\text{interf.}}$$

S_0 es el término de difracción de 1 solo período de la red.

$$\hookrightarrow S_0(\theta,\varphi) = \frac{(1+\cos\theta)}{2} A \int_0^H \underbrace{t_y(y')\, e^{iky'\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}}_{(\psi_{inc}(y'))} dy' \int_0^d \underbrace{t_x(u)\, e^{iu(k\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi - k_{ox})}}_{(\psi_{inc.}(x'))} du$$

OJO $\longrightarrow$ áng. incidencia

$\Rightarrow \psi_{inc}(\bar{r}') \neq cte$

Otra vez → Interferencia de N fuentes ×

Difracción de un único objeto repetido periódicamente

Los máximos de interf. ocurren cuando

$$\frac{d(k \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - k_{ox})}{2} = m\pi$$

Con una amplitud modulada por $S_o(\theta, \varphi)$

Recordamos q' $k_{ox} = k \operatorname{sen}\gamma \cos\varepsilon = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen}\gamma \cos\varepsilon$

⇒ ~~[illegible]~~ los máximos ocurren cuando

$$\operatorname{sen}\theta_m \cos\varphi_m - \operatorname{sen}\gamma \cos\varepsilon = \frac{m\lambda}{d}$$

2 incógnitas : falta analizar la posic. en y

En el caso de incidencia en el plano (xz) $(\varepsilon = 0, \varphi_m = 0)$

y sup. $M \to \infty$ (comp. con d)

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta_m - \operatorname{sen}\gamma = \frac{m\lambda}{d}}$$

Ecuación de la red

Si dibujamos $S_o(\theta, \varphi)$ → el máximo está en $\theta = \gamma$

o sea el punto donde pegaría el haz de no haber obstáculo $(\theta_o$ p/ $m = 0)$ → igual p/ todos los λ