Ejercicio 16

February 3, 2016

```
In [1]: %matplotlib inline

In [2]: from pylab import *
```

0.1 Un poco de teoría

Las ecuaciones en formato matricial son:

$$\ddot{\overline{\Psi}} + \Gamma\dot{\overline{\Psi}} + \mathbb{M}\overline{\Psi} = \overline{F}/m$$

En la base de modos normales el sistema se simplifica a N ecuaciones independientes para cada modo i de la forma:

$$\ddot{\Psi}_i + \Gamma\dot{\Psi}_i + \omega_{0i}^2\Psi_i = F_i/m$$

donde ω_{0i}^2 son los autovalores de $\mathbb{M}$ y los desplazamientos y fuerzas en los modos se obtienen de $F = \mathbb{D}^t\overline{F}$ y $\Psi = \mathbb{D}^t\overline{\Psi}$. La matriz $\mathbb{D}$ se forma acomodando los autovectores de $\mathbb{M}$ en columnas.

0.1.1 Solución estacionaria

Para una fuerza proporcional al $\cos(\Omega t)$, la solución estacionaria para cada nodo esta dada por:

$$\Psi_i^{est} = A_i\sin(\Omega t) + B_i\cos(\Omega t)$$

con las amplitudes dadas por las relaciones:

$$A_i = \frac{F_i}{m}\frac{\Omega\Gamma}{(\omega_{0i}^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2\Gamma^2}$$

$$B_i = \frac{F_i}{m}\frac{\omega_{0i}^2 - \Omega^2}{(\omega_{0i}^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2\Gamma^2}$$

La solución estacionaria para cada partícula se obtiene invirtiendo el cambio de base $\overline{\Psi}^{est} = \mathbb{D}\Psi^{est}$.

0.2 Parámetros del problema

```
In [3]: g = 10                  # aceleración de la gravedad
        m = 1                   # masa de los péndulos
        l_largos = 1            # largo de los primeros péndulos
        l_cortos = 0.5          # idem de los del final de la cadena
        k = 5                   # constante de los resortes
        Gama = 0.1              # constante de amortiguamiento
        N_largos = 30           # número de péndulos largos
        N_cortos = 200          # número de péndulos cortos
        F0_sobre_m = 4          # fuerza sobre la primera masa
        Omega = 3               # frecuencia angular de forzado
```

0.3 Importamos algunas herramientas

```
In [4]: from scipy import *
        from scipy.linalg import eigh
        from scipy.sparse import spdiags, hstack, vstack, bmat, dia_matrix
```

0.4 Esta función construye la matriz M

```
In [5]: def get_M(N1,l1,N2,l2):
            Nm = N1+N2
            diag0 = zeros(Nm); diag1 = zeros(Nm)
            diag0[:N1] = g/l1+2*k/m          # Elementos de la diagonal, largos
            diag0[N1:] = g/l2+2*k/m          # Elementos de la diagonal, cortos
            diag1[1:] = -k/m                 # Elementos extradiagonales

            Mi = spdiags([diag0,diag1],[0,1],Nm,Nm)
            return Mi
```

0.5 Esta otra función calcula los coeficientes de la solución estacionaria

```
In [6]: def get_sol_estacionaria(w0,Fm,Omega):
            Aes = zeros(w0.size)
            Bes = zeros(w0.size)

            Aes =         Omega*Gama*Fm/((w0**2-Omega**2)**2 + Omega**2*Gama**2)
            Bes = (w0**2 - Omega**2)*Fm/((w0**2-Omega**2)**2 + Omega**2*Gama**2)

            return Aes, Bes
```

0.5.1 Obtengamos las frecuencias naturales y sus autovectores

```
In [7]: M = get_M(N_largos,l_largos,N_cortos,l_cortos).toarray()
        w0_cuadrado, Dmatrix = eigh(M,lower=False)
```

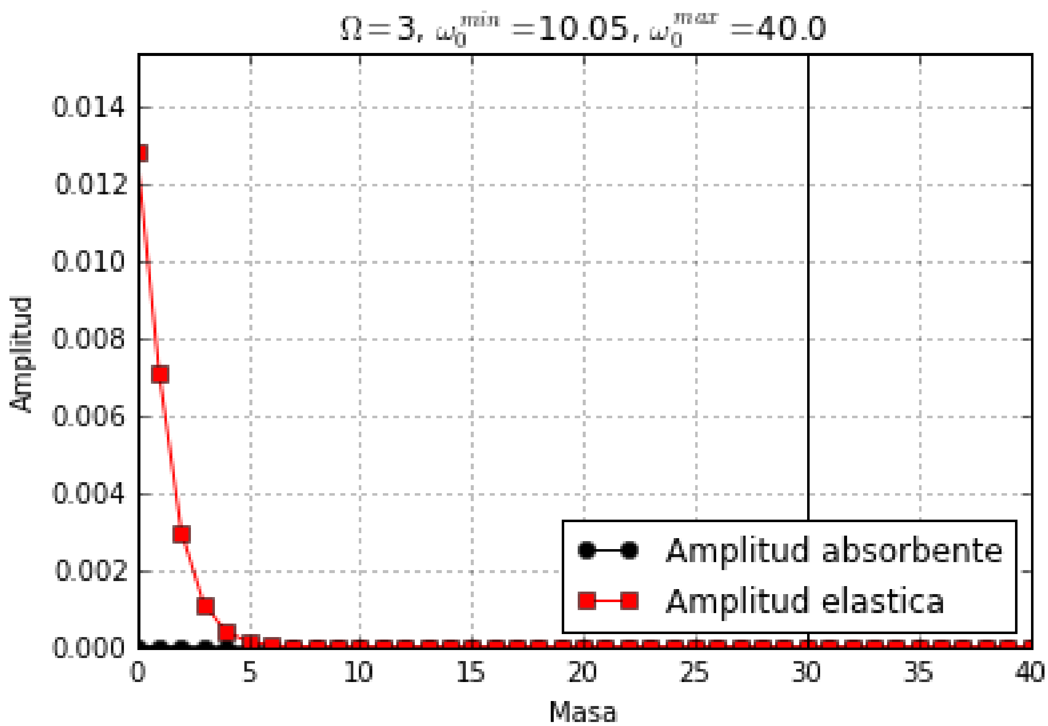
0.5.2 Ahora calculemos la fuerza sobre los modos

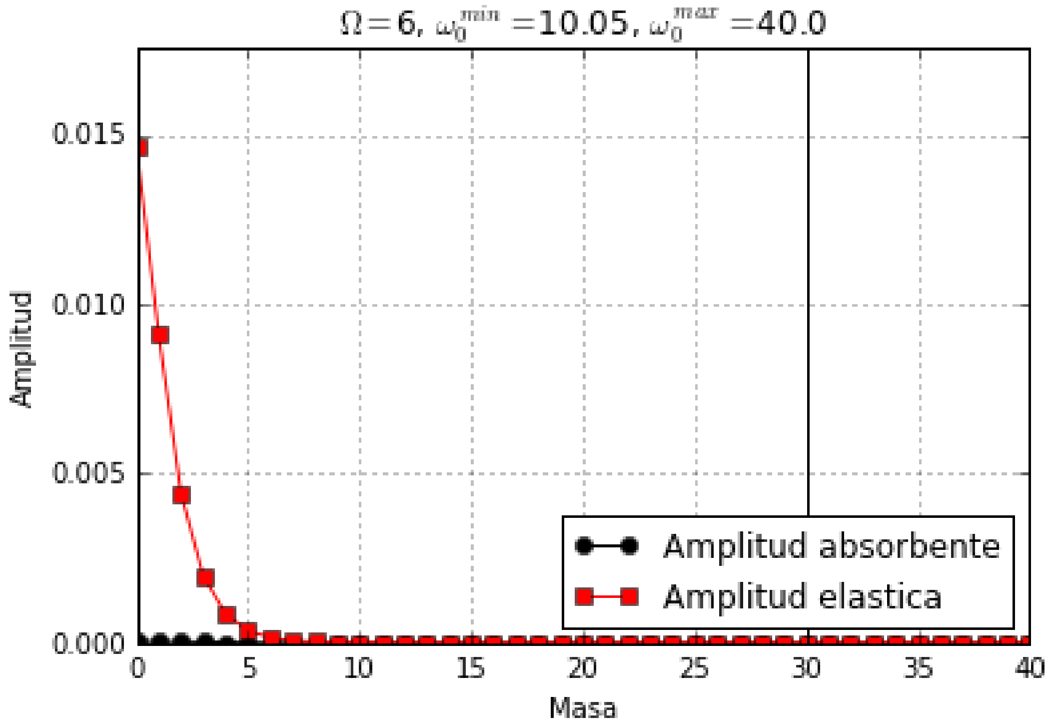
```
In [8]: F = zeros(N_largos+N_cortos); F[0] = F0_sobre_m
        F_en_modos = dot(transpose(Dmatrix),F)
```

0.5.3 Finalmente grafiquemos para algunas frecuencias de forzado las amplitudes

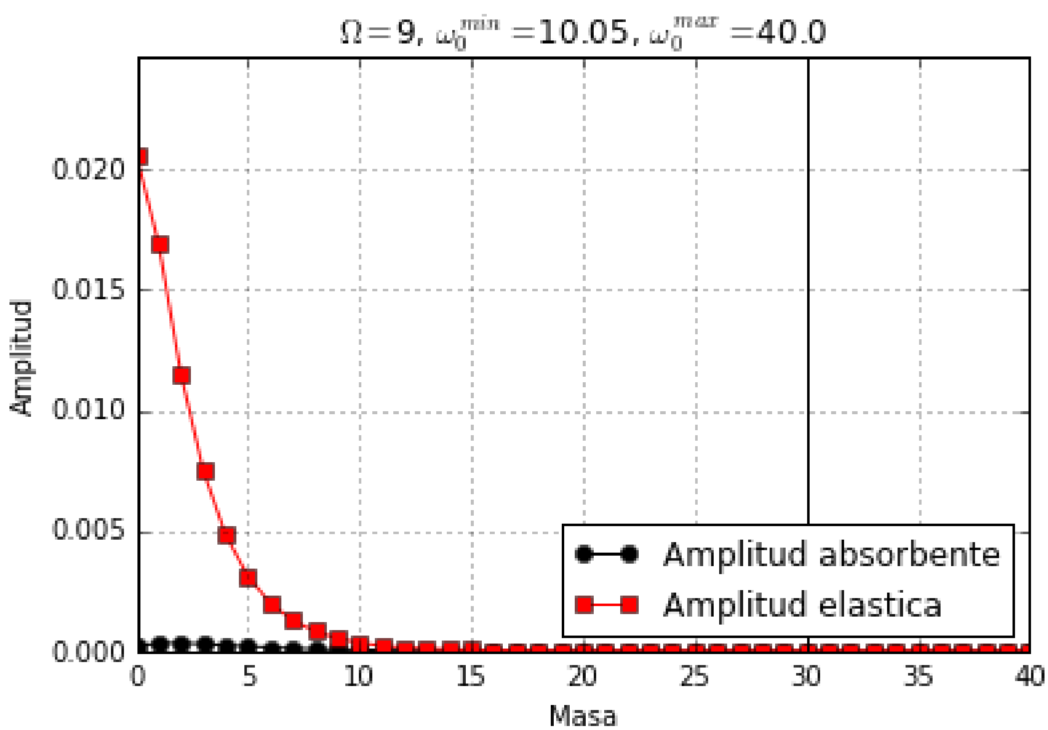
```
In [9]: for i in range(13):
            Omega = 3 + i*3

            A_en_modos, B_en_modos = get_sol_estacionaria(w0_cuadrado,F_en_modos,Omega)

            A = dot(Dmatrix,A_en_modos)

            B = dot(Dmatrix,B_en_modos)

            figure()
            plot(A,'ok-',label='Amplitud absorbente')
            plot(B,'sr-',label='Amplitud elastica')
            plot((N_largos,N_largos),(1.2*min(A.min(),B.min()),1.2*max(A.max(),B.max())),'k-')
            grid()
            axis([0,40,1.2*min(A.min(),B.min()),1.2*max(A.max(),B.max())])
```

```
xlabel('Masa')
ylabel('Amplitud')
legend(loc='lower right')
w0_min = str(round(w0_cuadrado.min(),2))
w0_max = str(round(w0_cuadrado.max(),2))
title(r'$\Omega = $'+str(Omega)+', '+r'$\omega_0^{min} = $'+w0_min+', '+r'$\omega_0^{max} =
```

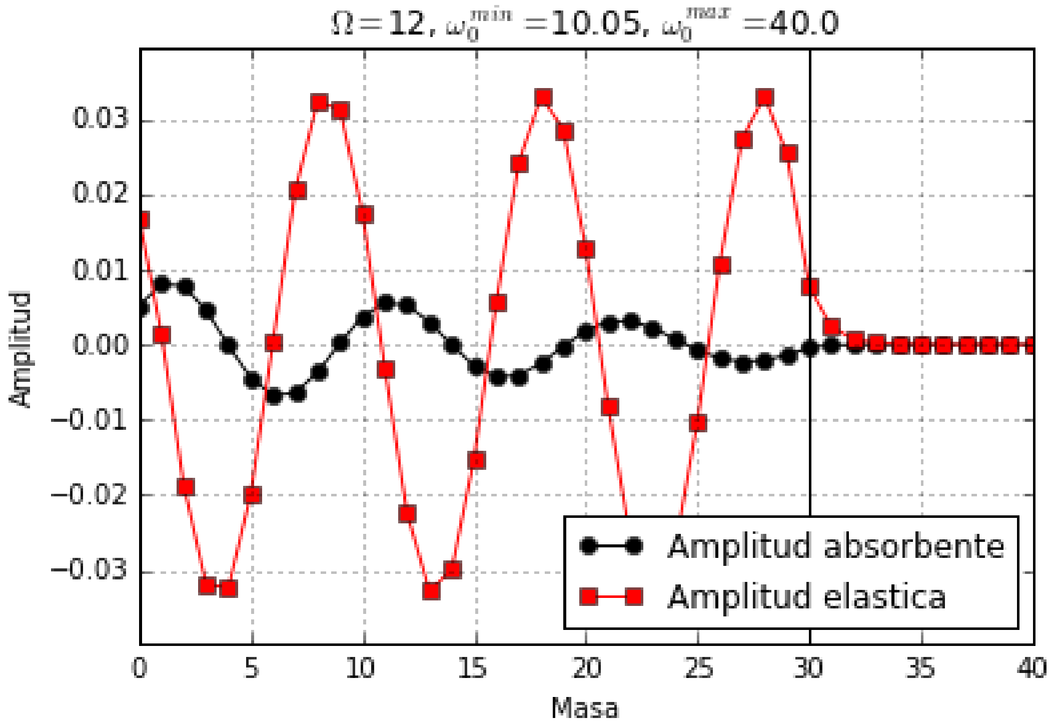




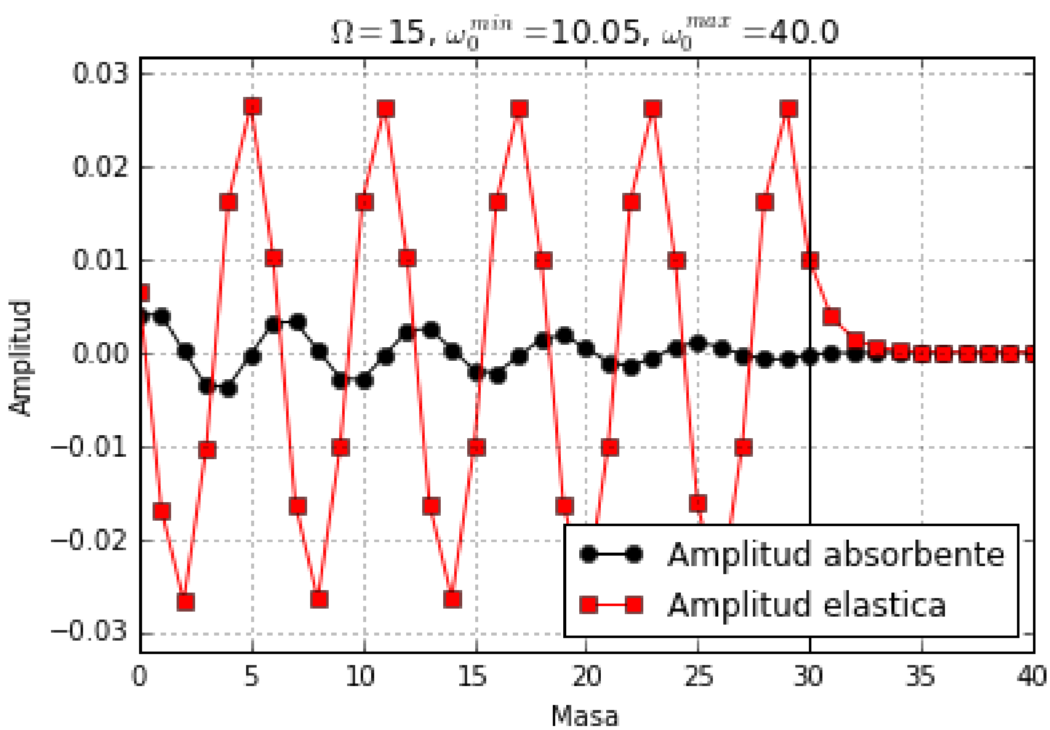
$\Omega = 6$, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
Amplitud
0.000
0.005
0.010
0.015
0 5 10 15 20 25 30 35 40
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica



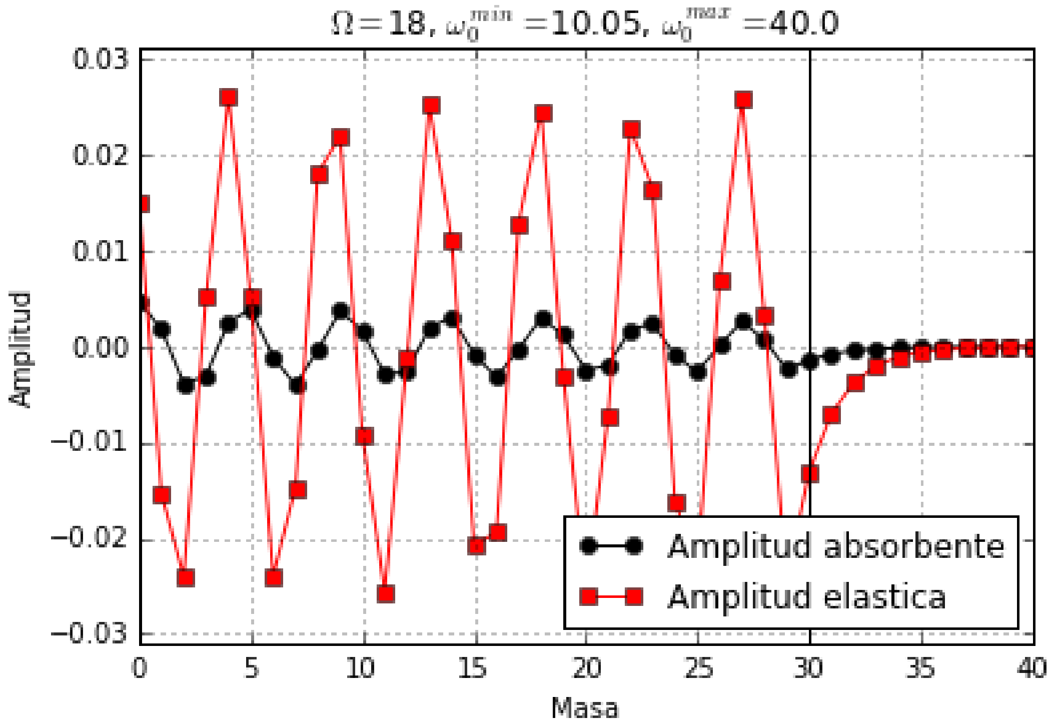
$\Omega = 9$, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
Amplitud
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0 5 10 15 20 25 30 35 40
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

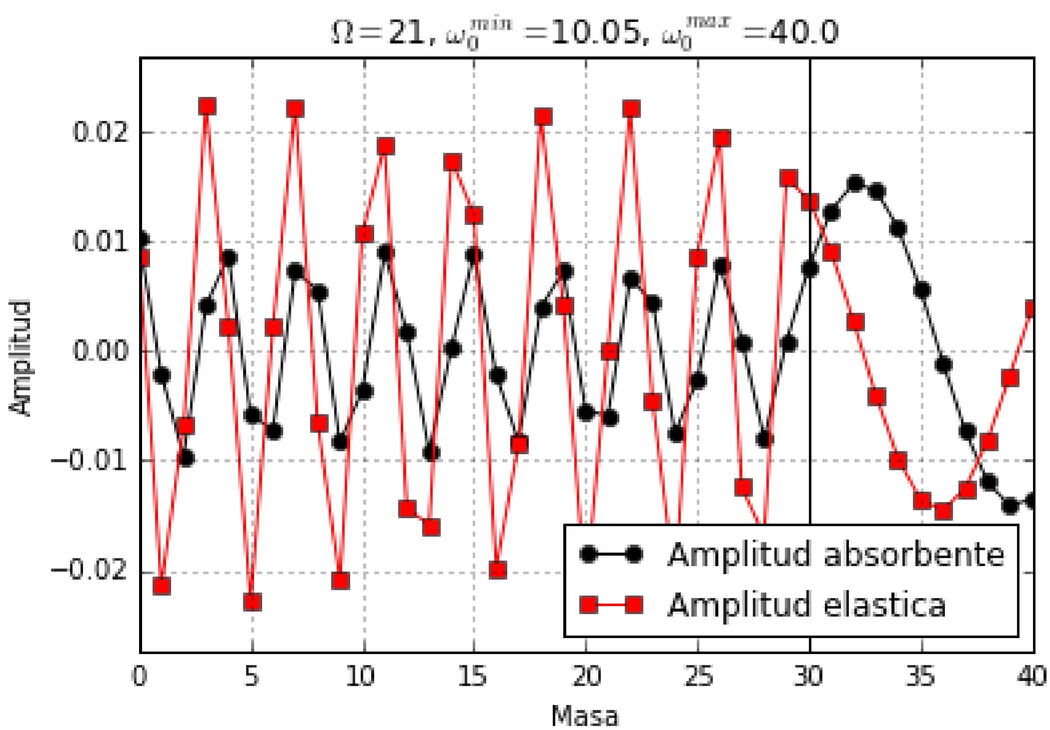


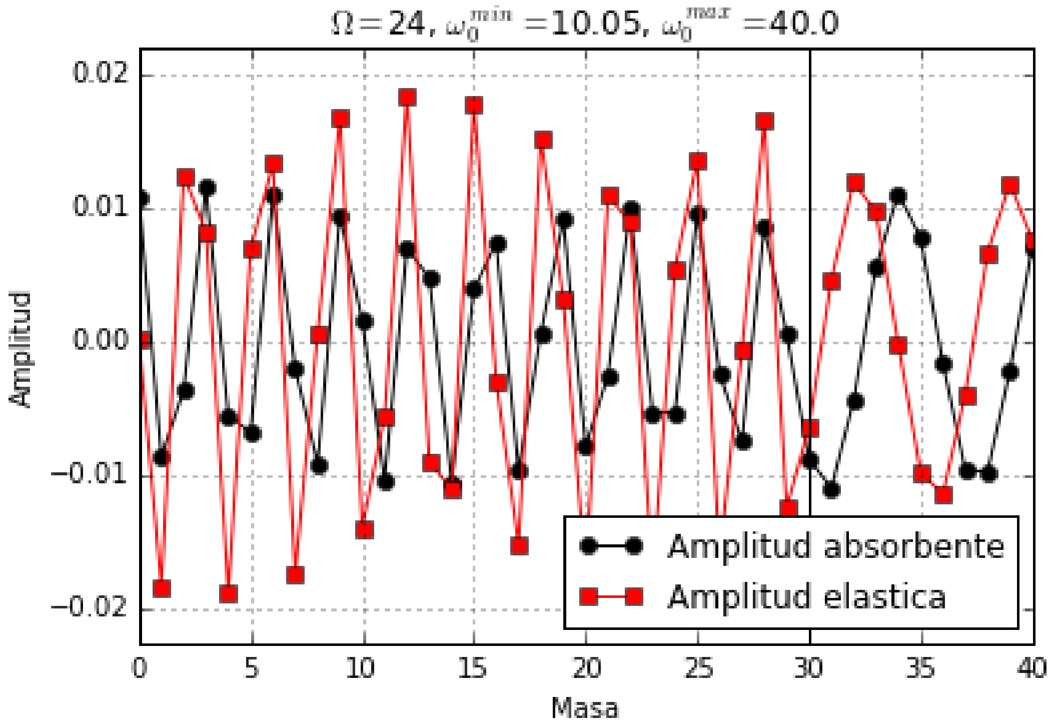
$\Omega = 12$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

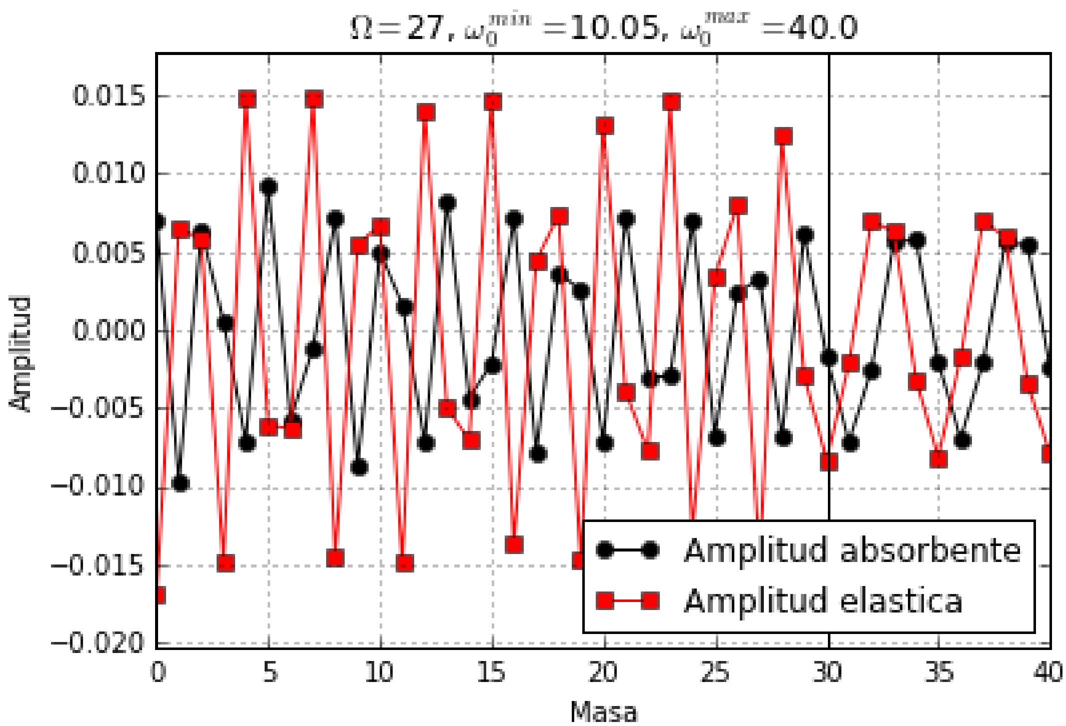


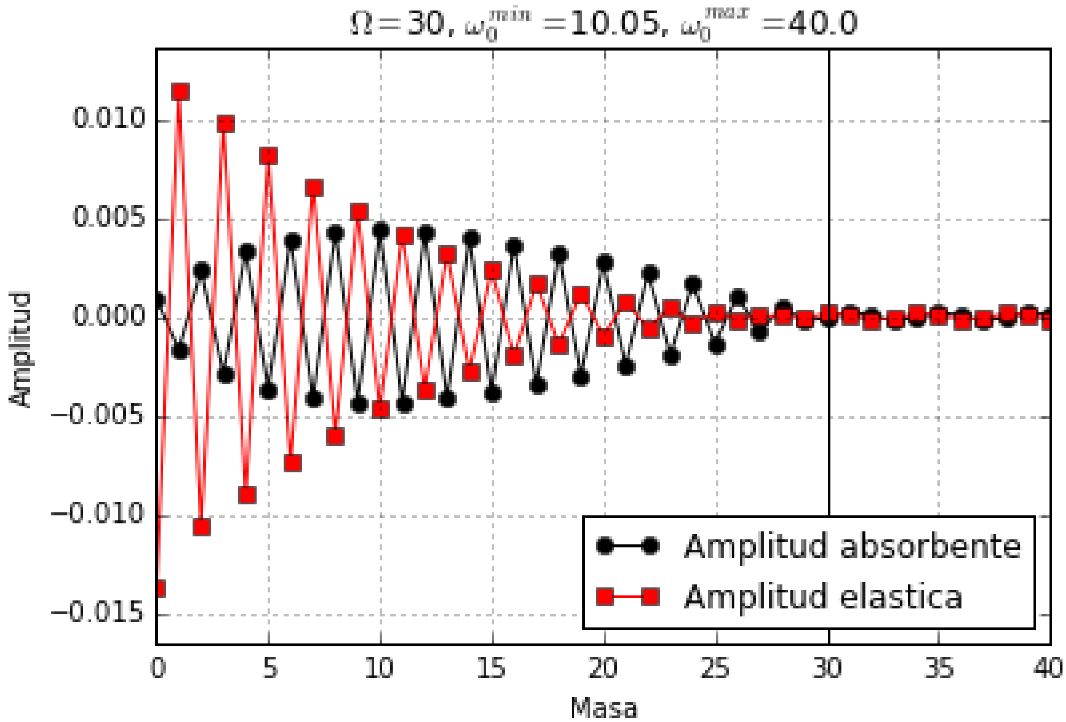
$\Omega = 15$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

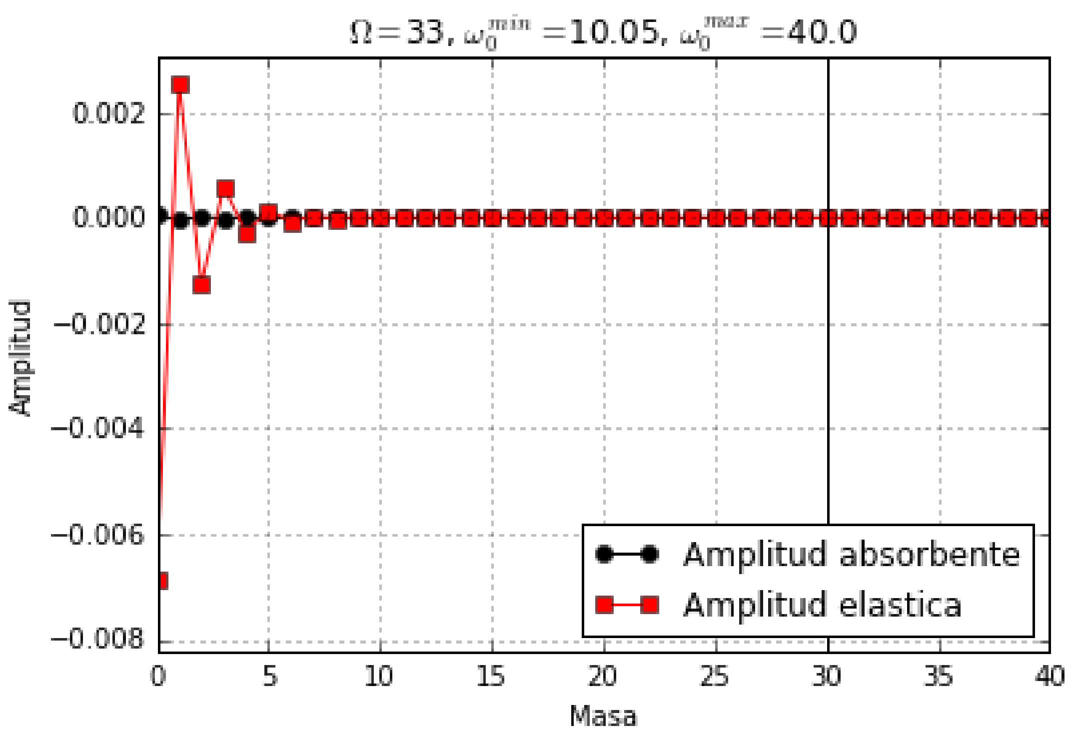

Ω=18, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
0.03
0.02
0.01
0.00
−0.01
−0.02
−0.03
Amplitud
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

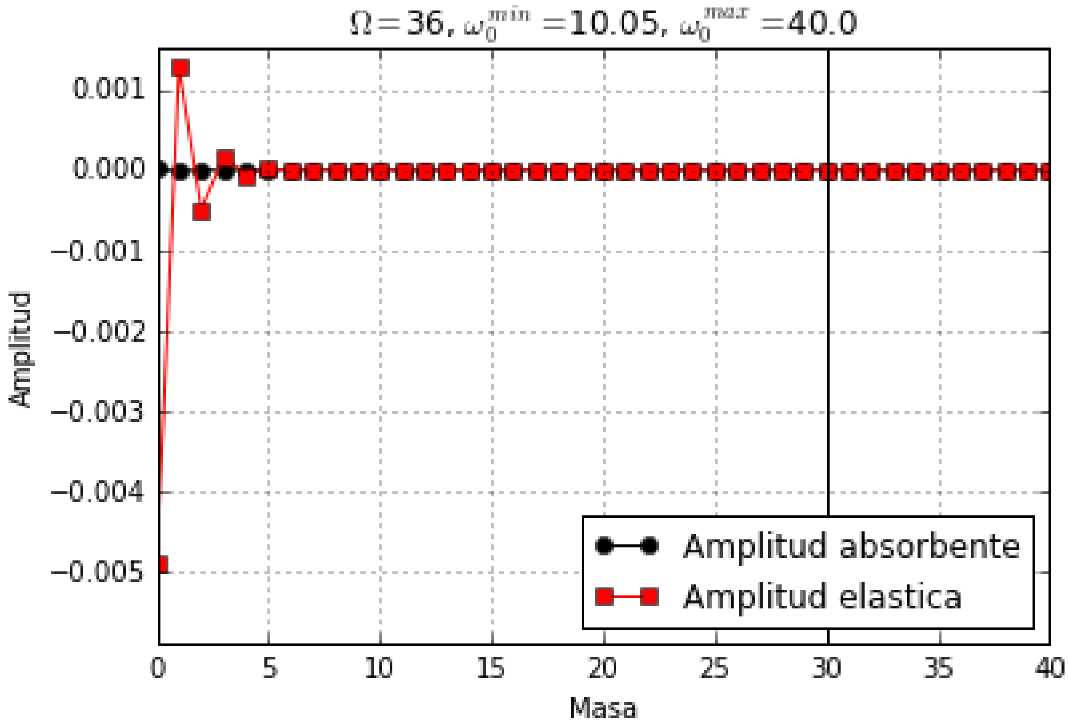

Ω=21, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
0.02
0.01
0.00
−0.01
−0.02
Amplitud
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica


$\Omega = 24$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

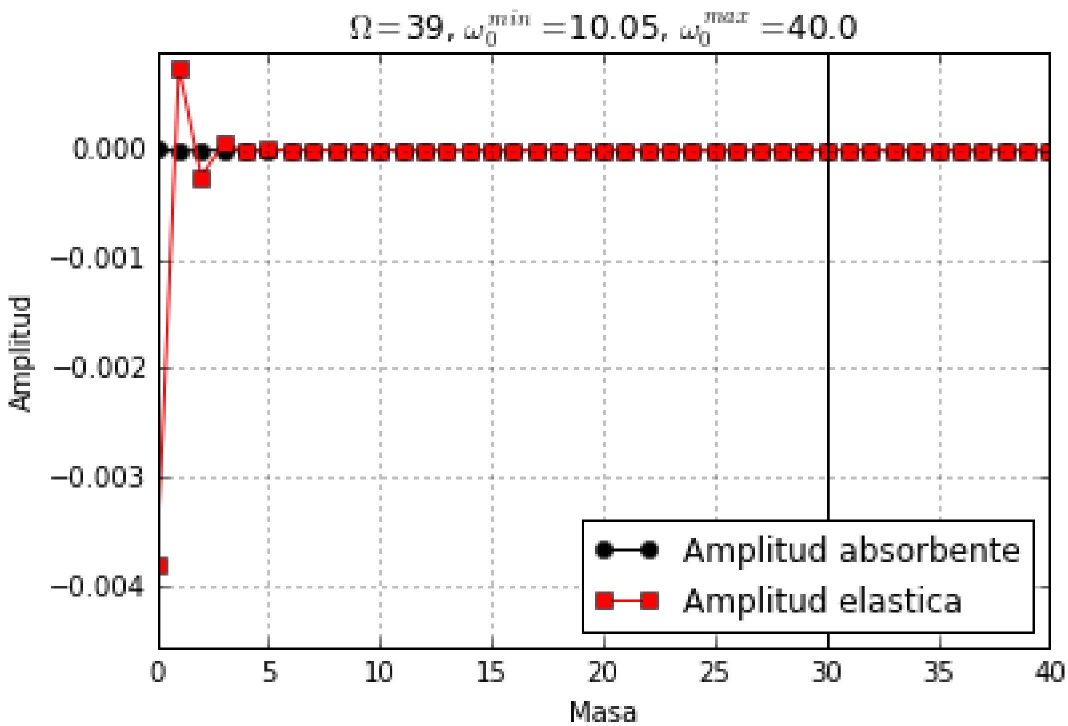

$\Omega = 27$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica


$\Omega = 30$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica


$\Omega = 33$, $\omega_0^{min} = 10.05$, $\omega_0^{max} = 40.0$
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica



$\Omega = 36$, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica



$\Omega = 39$, ω_0^{min} =10.05, ω_0^{max} =40.0
Amplitud
Masa
Amplitud absorbente
Amplitud elastica

0.6 Puede explicar lo que observa en los gráficos?

Esperemos que si! :)