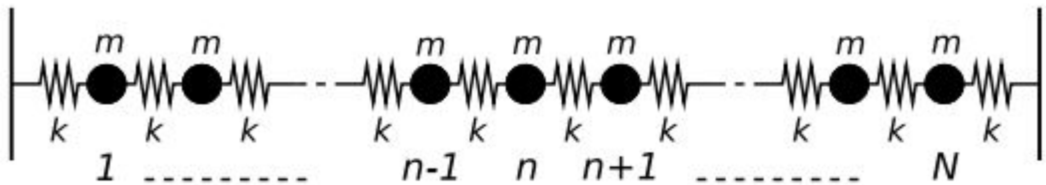
Producto interno entre modos normales (vectores)

Sistema de N masas acopladas mediante resortes, extremos fijos:



a = separación entre masas en equilibrio

Condiciones de borde: Las masas 0 y N+1 tienen desplazamiento nulo para todo t

Solución:

$$\Psi_n(t) = A\cos(kan + \phi)\cos(\omega t + \phi_t)$$

$$m\omega^2 = 4K sen^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

k_p = p*pi/(N+1)/a

phi = pi/2

Supongamos $N = 20$

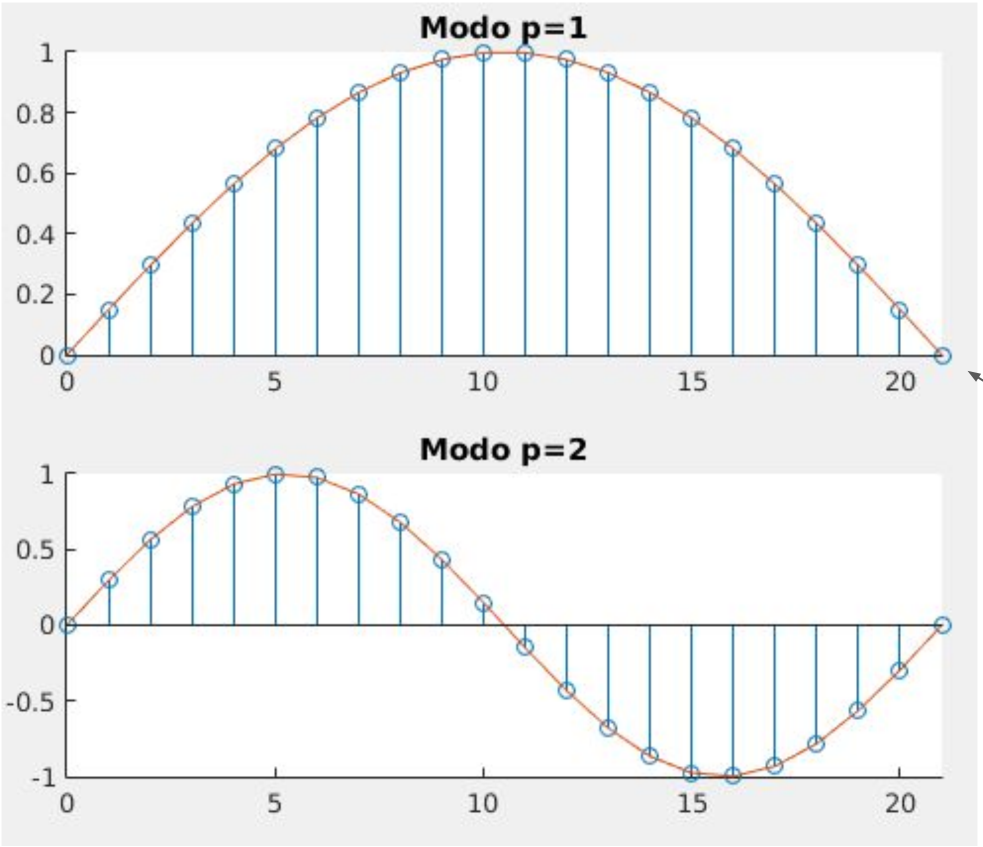
Modo fundamental, $p = 1 \Rightarrow k_1 = \pi/(N+1)/a$

Perfil espacial: $\mathrm{sen}(n\pi/(N+1))$

Segundo armónico, $p = 2 \Rightarrow k_2 = 2\pi/(N+1)/a$

Perfil espacial: $\mathrm{sen}(2n\pi/(N+1))$

NOTA: los ejemplos están hechos con los modos 1 y 2 porque son muy fáciles de ver, pero las mismas conclusiones valen para cualquier par de modos



Ojo! Están incluidas las masas “ficticias” 0 y N+1

Hacer el producto interno significa multiplicar componente a componente ambos modos, y sumar.

Se ve del gráfico que el producto interno de los primeros once elementos se cancelará con el de los últimos once (el perfil del modo 1 se repite pero en orden invertido, el perfil del modo 2 se repite en igual orden pero cambiado de signo…)

Para el que quiera comparar ambos modos, acá van los valores masa a masa:

```
modos =

  Columns 1 through 7

    0      0.14900.29480.43390.56330.68020.7818
    0      0.29480.56330.78180.93090.99720.9749

  Columns 8 through 14

    0.86600.93090.97490.99720.99720.97490.9309
    0.86600.68020.43390.1490     -0.1490     -0.4339     -0.6802

  Columns 15 through 21

    0.86600.78180.68020.56330.43390.29480.1490
   -0.8660     -0.9749     -0.9972     -0.9309     -0.7818     -0.5633     -0.2948

  Column 22

    0.0000
   -0.0000
```

Código:
p=1
p=2

Producto interno entre modos normales (funciones)

Cuerda de longitud L con extremos fijos:

Solución:

$$\Psi_n(t) = A\cos(kan + \phi)\cos(\omega t + \phi_t)$$

omega_p = c*k_p

k_p = p*pi/L

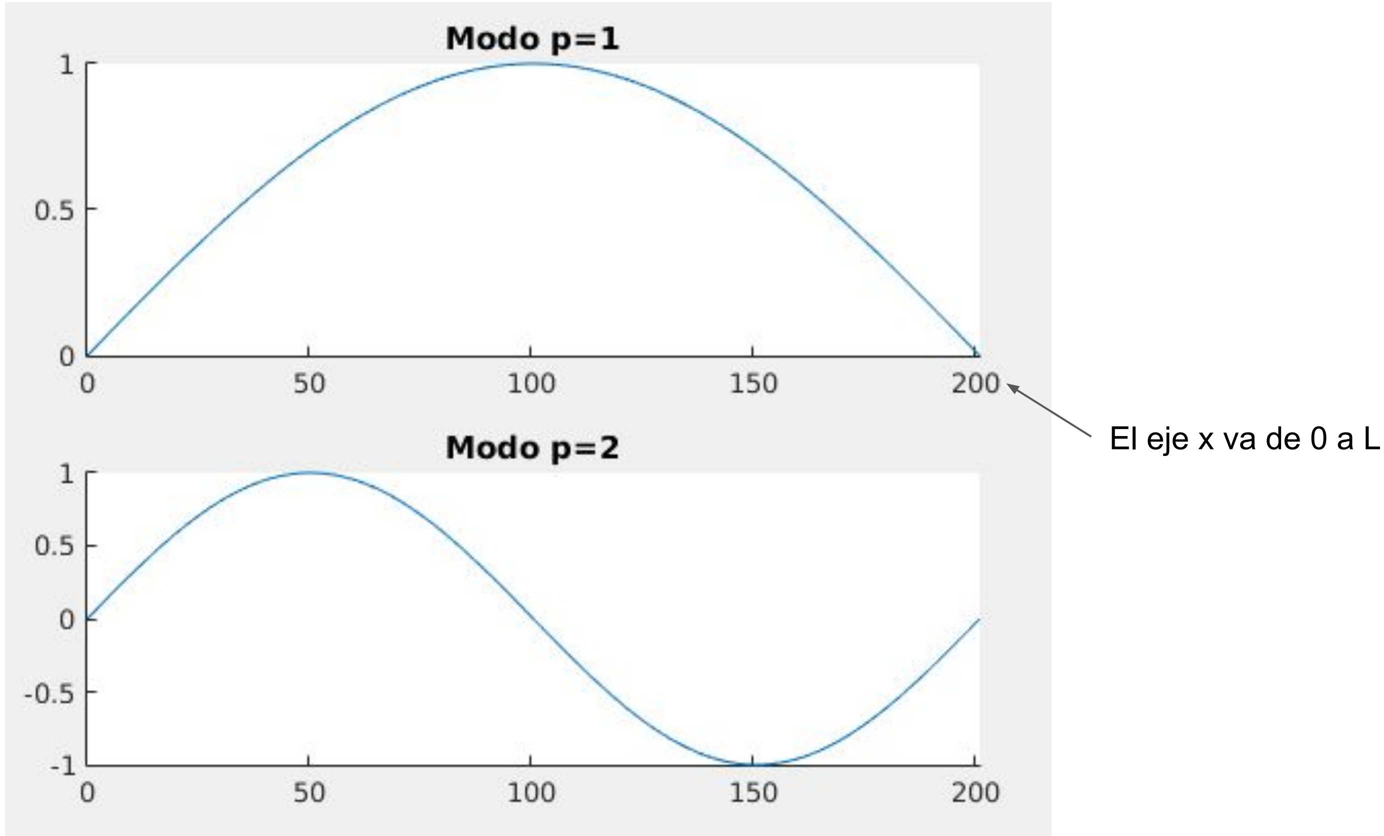
phi = pi/2

Modo fundamental, p = 1 => k_1 = pi/L

Perfil espacial: sen((pi/L)*x)

Segundo armónico, p = 2 => k_2 = 2*pi/L

Perfil espacial: sen((2*pi/L)*x)



Se ve que al igual que en el caso discreto, si multiplicamos ambos modos “punto a punto” y “sumamos”, obtenemos un cierto valor de 0 a 100, y el mismo valor cambiado de signo de 100 a 200. Es decir que en el intervalo que va de 0 a 200 dicha operación dará 0.

Esto es lo que esperábamos a partir de lo que aprendimos en el caso discreto...

¿Cómo sumamos los valores que toma una función en un dado rango? (O, en este caso, una función definida como un producto de otras funciones).

Dividimos el rango en N intervalos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

Evaluamos la función en un punto interior de cada intervalo, y sumamos:

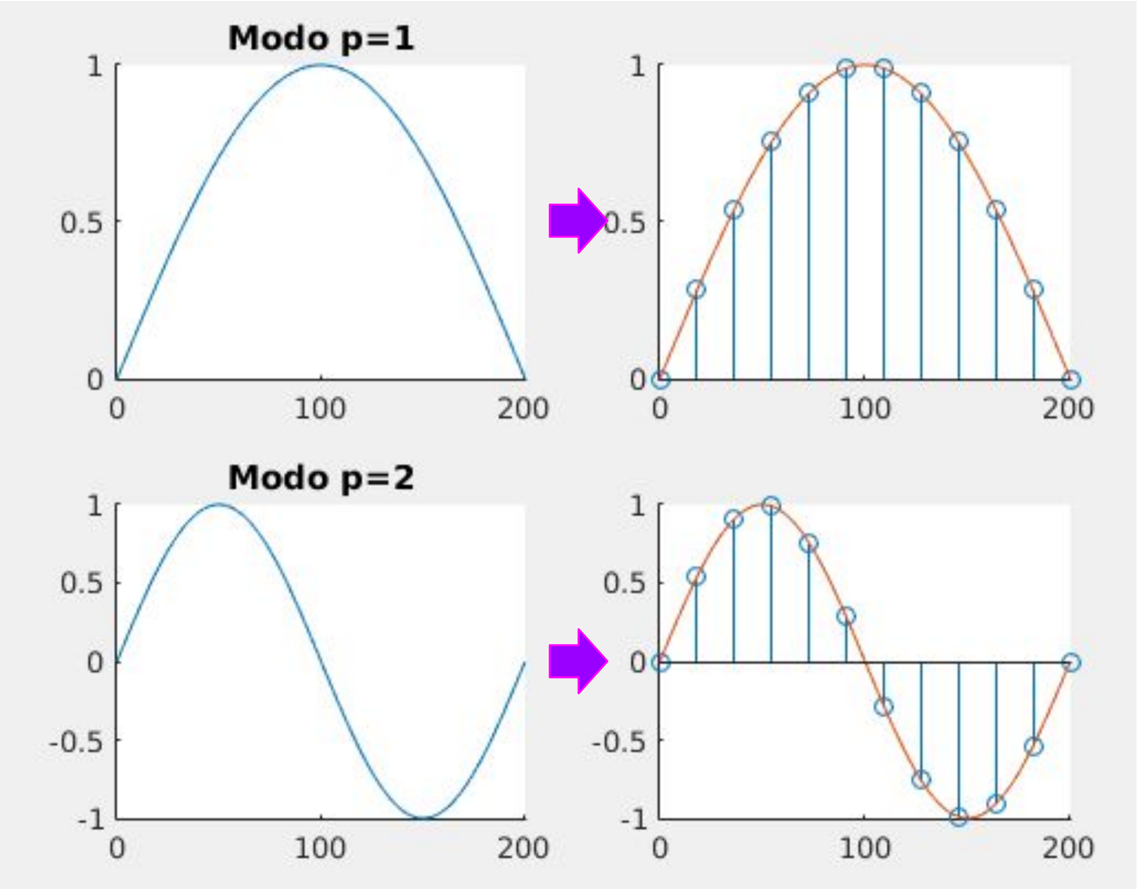
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\,(x_{i+1} - x_i)\,.$$

Tomando el límite de infinitos intervalos infinitesimales definimos la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Al hacer esto consideramos que los intervalos tienen la misma longitud, por lo que podemos pensar que realmente estamos sumando todos los valores de la función punto a punto (y multiplicando por un factor delta x al final de todo).

El paso en el que evaluamos a la función en N puntos (cada uno correspondiente a uno de los N intervalos en que dividimos el eje x), lo podemos pensar como una transformación de la función en un vector de N elementos (discretización).



El paso al continuo consiste en llevar N a infinito, lo que equivale a tener un sistema con cada vez más masas. Podemos pensar a la función que describe a cada modo como una fórmula que nos da los elementos del vector asociado en el sistema discreto.

Al definir el producto interno entre dos funciones como la integral del producto entre ambas, lo que estamos haciendo* es pensar a cada función como un vector de infinitos elementos. El producto entre ambas funciones es equivalente a la multiplicación elemento a elemento, y la integral es equivalente a la suma sobre todos los elementos.

* O al menos una forma de interpretarlo