

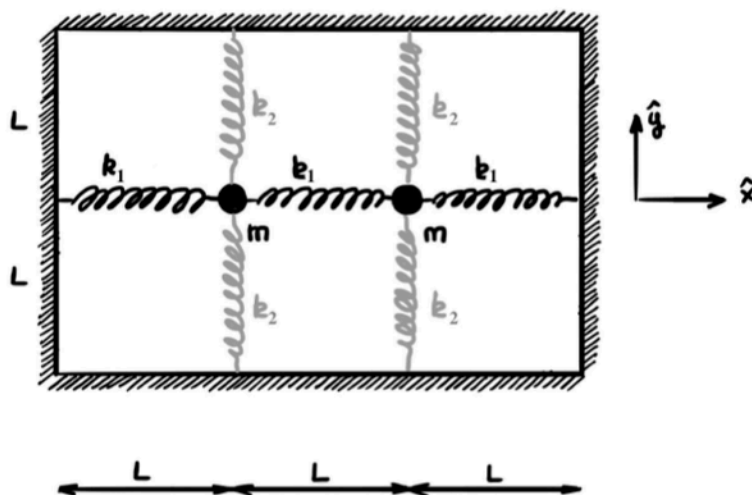
Física 2 – verano 2020
Primer Parcial – 17/02

Resolver los problemas y el ejercicio teórico en hojas separadas.

1. (4 puntos).

Considere el sistema de dos partículas iguales de masa m unidas por un resorte, como se indica en la figura. Cada partícula está unida a la pared vertical a su lado por otro resorte, todos orientados en dirección $\hat{x}$ y de constante elástica k_1 . Además, cada partícula está unida a otros dos resortes en dirección $\hat{y}$, perpendicular a los anteriores, de constante elástica k_2 . Se consideran oscilaciones en el plano de los resortes. Todos los resortes son slinkies.

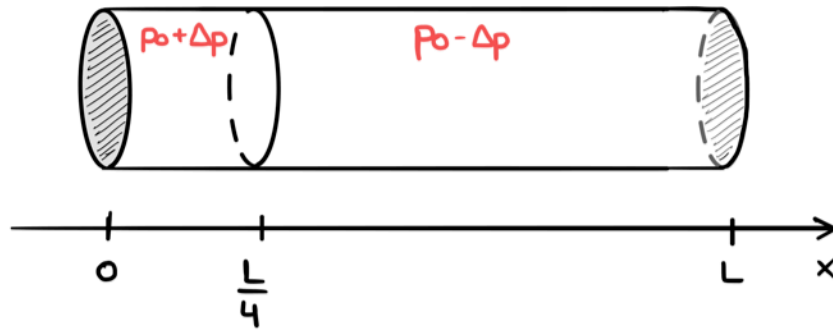
- (a) Hallar las ecuaciones de movimiento de cada partícula.
- (b) ¿Cuántos modos normales tiene el sistema? Calcular las frecuencias propias y modos normales de oscilaciones en $\hat{x}$. Interprete el resultado.
- (c) Escriba la forma más general de la posición en función del tiempo $x(t)$ de cada partícula en la dirección $\hat{x}$. Establezca una condición inicial a $t = 0$ para excitar sólo el modo más alto en esa dirección e indique las posiciones para $t > 0$ en este caso.
- (d) Se aplica una fuerza $F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \hat{x}$ a la partícula de la derecha de la figura. Suponga un amortiguamiento débil, esto es $\Gamma^2 \ll k_{1,2}/m$. Escriba la posición de la partícula de la izquierda para tiempos $t \gg 1/\Gamma$ y en el caso en que Ω sea mucho mayor que las frecuencias propias del sistema. Justifique.



2. (3 puntos).

Se tiene un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos, como se indica en la figura. A una distancia $L/4$ de uno de sus extremos hay un tabique rígido. De un lado del tabique, hay un gas a presión $p_0 + \Delta p$, mientras que del otro lado del tabique la presión es $p_0 - \Delta p$, siendo $\Delta p \ll p_0$. Todo el gas se encuentra en reposo. Datos: $p_0, \Delta p, \rho_0, \gamma$.

A tiempo $t = 0$ se remueve el tabique, dejando evolucionar el sistema.



- Proponga una expresión general para un modo normal de desplazamiento $\psi_n(x, t)$ y para un modo normal de la variación de presión $\delta p_n(x, t)$ en el tubo. ¿Cuáles son las condiciones de contorno que deben satisfacer los modos? Imponga las condiciones de contorno correspondientes y encuentre las frecuencias permitidas ω_n .
- Escriba la expresión de la condición inicial $\delta p(x, 0)$ y de $\psi(x, 0)$, gráfíquelas.
- Escriba la solución más general de las perturbaciones $\delta p(x, t)$ y de $\psi(x, t)$, y resuélvalas usando las condiciones iniciales. ¿Cuál es el período temporal de las oscilaciones?

3. (3 puntos).

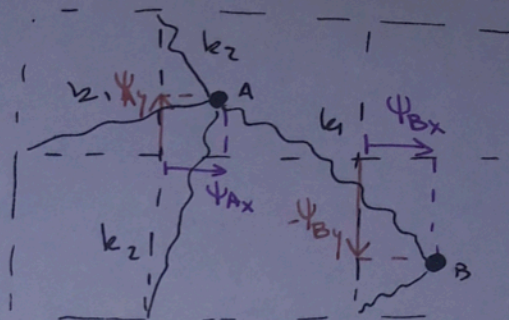
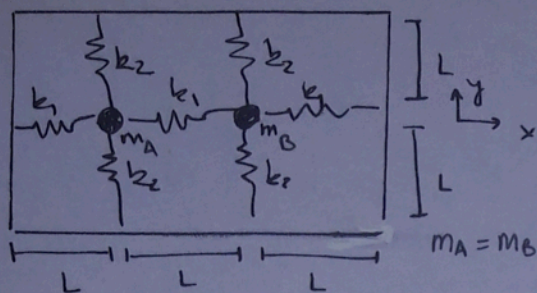
Se tiene una cuerda infinita a lo largo del eje x . A tiempo $t = 0$ se la deforma con una perturbación dada por

$$\phi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < -\frac{a}{2} \\ A_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{a}{2} < x < +\infty \end{cases}$$

y se la suelta (desde el reposo). Se considera a la cuerda un medio no dispersivo con densidad lineal de masa μ y sometida a una tensión constante y uniforme T_0 . Datos: μ, T_0, A_0, a .

- Obtenga la velocidad de propagación v y halle la perturbación $\phi(x, t)$ (para todo x y para todo t) que satisface la ecuación de ondas clásica. Grafique $\phi(x, t)$ para $t = 0$, $t = \frac{1}{2} \frac{a}{2v}$ y $t = \frac{a}{2v}$.
- Calcule la energía inicial, a $t = 0$, de la perturbación. ¿Qué energía tiene la perturbación a $t = \frac{a}{2v}$ en la región $x > 0$? Comente el resultado.
- En el punto x_p la cuerda se une a otra cuerda cuya densidad lineal de masa es tan grande que puede considerarse infinita. Plantee la condición sobre la perturbación en el punto $x = x_p$ (use que $x_p > a$). Grafique la perturbación en la región $0 < x < x_p$ en el instante $t = \frac{1}{v}(x_p + a/2)$ e indique la velocidad de propagación, si corresponde. ¿Qué energía tiene la perturbación en ese instante? Justifique las respuestas.

Problema 1) Resortes slinkies $l_0 = 0$.



a) Escribo las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\psi}_{Ax} = & -k_1 \frac{\sqrt{(L + \psi_{Ax})^2 + \psi_{Ay}^2}}{\sqrt{(L + \psi_{Ax})^2 + \psi_{Ay}^2}} (L + \psi_{Ax}) + \\
 & k_1 \frac{(\sqrt{(\psi_{Ay} - \psi_{By})^2 + (L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx})^2} \cdot (L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx}))}{\sqrt{(\psi_{Ay} - \psi_{By})^2 + (L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx})^2}} \\
 & - k_2 \frac{\sqrt{(L + \psi_{Ay})^2 + \psi_{Ax}^2}}{\sqrt{(L + \psi_{Ay})^2 + \psi_{Ax}^2}} \psi_{Ax} - k_2 \frac{\sqrt{(L - \psi_{Ay})^2 + \psi_{Ax}^2}}{\sqrt{(L - \psi_{Ay})^2 + \psi_{Ax}^2}} \psi_{Ax}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \ddot{\psi}_{Ax} = -k_1 (L + \psi_{Ax}) + k_1 (L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx}) - 2k_2 \psi_{Ax}$$

$$\ddot{\psi}_{Ax} = -\frac{2}{m} (k_1 + k_2) \psi_{Ax} + \frac{k_1}{m} \psi_{Bx}$$

Para la masa A en la dirección $\hat{x}$.

$$\begin{aligned}
 m \ddot{\psi}_{Ay} = & k_1 \frac{\sqrt{(L + \psi_{Ax})^2 + \psi_{Ay}^2}}{\sqrt{(L + \psi_{Ax})^2 + \psi_{Ay}^2}} (-\psi_{Ay}) + \\
 & k_1 \frac{\sqrt{(L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx})^2 + (\psi_{Ay} - \psi_{By})^2} \cdot (\psi_{By} - \psi_{Ay})}{\sqrt{(L - \psi_{Ax} + \psi_{Bx})^2 + (\psi_{Ay} - \psi_{By})^2}} + k_2 \frac{\sqrt{(L - \psi_{Ay})^2 + (\psi_{Ax} + L)^2}}{\sqrt{(L - \psi_{Ay})^2 + (\psi_{Ax} + L)^2}} (L - \psi_{Ay}) \\
 & - k_2 \frac{\sqrt{(L + \psi_{Ay})^2 + (\psi_{Ax} + L)^2}}{\sqrt{(L + \psi_{Ay})^2 + (\psi_{Ax} + L)^2}} (L + \psi_{Ay})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m \ddot{\psi}_{Ay} = -k_1 \psi_{Ay} + k_1 (\psi_{By} - \psi_{Ay}) - 2k_2 \psi_{Ay}$$

$$\ddot{\psi}_{Ay} = -\frac{2(k_1 + k_2)}{m} \psi_{Ay} + \frac{k_1}{m} \psi_{By}$$

Para la masa A en la dirección $\hat{y}$.

→ Por la simetría del problema, las ecuaciones para la masa B son análogas (Reemplazo $A \leftrightarrow B$).

Entonces, las ecuaciones de movimiento para el sistema en el plano son:

$$\ddot{\Psi}_{Ax} = -2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} \Psi_{Ax} + \frac{k_1}{m} \Psi_{Bx}$$

$$\ddot{\Psi}_{Bx} = -2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} \Psi_{Bx} + \frac{k_1}{m} \Psi_{Ax}$$

$$\ddot{\Psi}_{Ay} = -2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} \Psi_{Ay} + \frac{k_1}{m} \Psi_{By}$$

$$\ddot{\Psi}_{By} = -2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} \Psi_{By} + \frac{k_1}{m} \Psi_{Ay}$$

Quedan desacoplados los movimientos longitudinales de los transversales.

b) ¿Cuántos modos normales tiene el sistema?

→ El sistema tiene cuatro grados de libertad, por lo que tendrá cuatro modos de oscilación: dos correspondientes al movimiento transversal y dos al longitudinal.

→ Veo sólo oscilaciones en $\hat{x}$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Psi}_A \\ \ddot{\Psi}_B \end{pmatrix} = - \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} & -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_1}{m} & 2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\Psi} = -\mathbb{M} \Psi$$

Voy a proponer una solución de oscilación colectiva (modo normal)

$$\bar{\Psi} = \bar{r} \cos(\omega t + \theta) \rightarrow \text{Si es solución}$$

$$-\omega^2 \bar{r} \cos(\omega t + \theta) = -\mathbb{M} \cdot \bar{r} \cos(\omega t + \theta)$$

$$(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{I}) \bar{r} = 0 \rightarrow \text{Busco soluciones no triviales } (\bar{r} \neq 0)$$

$$\text{Entonces } \Leftrightarrow \det(\mathbb{M} - \omega^2 \mathbb{I}) = 0 \rightarrow \text{Busco los autovalores de la matriz } \mathbb{M}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} - \omega^2 & -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_1}{m} & 2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left(\frac{k_1}{m} \right)^2 = 0$$

$$2 \frac{(k_1 + k_2)}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k_1}{m}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + 2k_2}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k_1 + 2k_2}{m}$$

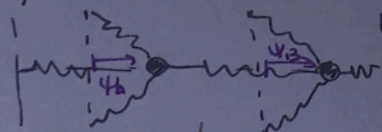
Busco los autovectores asociados:

Modo 1: $\omega_1^2 = \frac{2k_2 + k_1}{m}$

$$\begin{pmatrix} \frac{k_1}{m} & -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_1}{m} & \frac{k_1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$A - B = 0 \Rightarrow \boxed{A = B}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{las masas van en fase.}$$



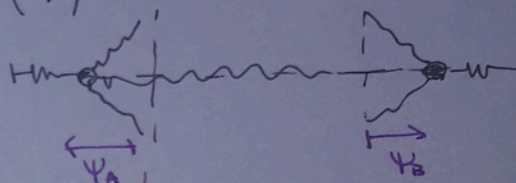
el resorte del medio no entra en juego.

Modo 2: $\omega_2^2 = \frac{2k_2 + 3k_1}{m}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_1}{m} \\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$A + B = 0 \Rightarrow \boxed{A = -B}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{masas en contrafase}$$



Frecuencia más alta porque influye el resorte del medio

c) La solución más general para el movimiento en la dirección $\hat{x}$ será una combinación lineal de los dos modos obtenidos.

$$\begin{pmatrix} \psi_A(x,t) \\ \psi_B(x,t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A, B, φ_1, φ_2 saldrán de las condiciones iniciales $(\psi_A(x,0), \psi_B(x,0))$
 $(\dot{\psi}_A(x,0), \dot{\psi}_B(x,0))$

Es fácil ver que si la condición inicial es proporcional al autovector del modo 2, el sistema oscilará en ese modo $\forall t$.

Puedo pedir, por ejemplo:

$$\bar{\psi}(x,0) = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \dot{\bar{\psi}}(x,0) = 0 \rightarrow \text{condiciones iniciales}$$

$$\dot{\bar{\psi}}(x,t) = -\omega_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \omega_2 B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{\bar{\psi}}(x,0) = -\omega_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(\varphi_1) - \omega_2 B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(\varphi_2)$$

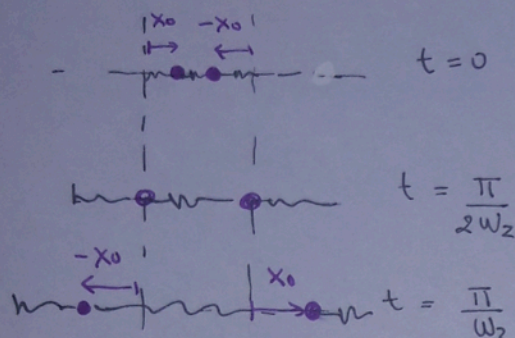
Elijo $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

$$\bar{\Psi}(x,0) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} B = x_0 \\ A = 0 \end{cases}$$

Esta no es la única forma de excitar el modo de frecuencia más alta, podría elegir $\bar{\Psi}(x,0)=0$, $\dot{\bar{\Psi}}(x,0)=v_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y otras combinaciones.

Para todo tiempo, con las CI elegidas:

$$\bar{\Psi}(x,t) = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k_1 + 2k_2}{m}}$$



d) $F(t) = F_0 \cos(\omega t) \hat{x}$. Amortiguamiento fcnl

↳ sobre la masa de la izquierda

las ecuaciones de movimiento en esta nueva configuración:

$$\ddot{\bar{\Psi}} = -M \bar{\Psi} - \Gamma \dot{\bar{\Psi}} + \begin{pmatrix} \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tengo un sistema acoplado con un término independiente (F(t)).}$$

Para resolver el sistema, voy a desacoplarlo usando coordenadas normales.

$$\begin{cases} \Psi_A = \phi_1 + \phi_2 \\ \Psi_B = \phi_1 - \phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \frac{\Psi_A + \Psi_B}{2} \\ \phi_2 = \frac{\Psi_A - \Psi_B}{2} \end{cases}$$

$$\ddot{\Psi}_A = -2 \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right) \Psi_A + \frac{k_1}{m} \Psi_B - \Gamma \dot{\Psi}_A + \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \quad [1]$$

$$\ddot{\Psi}_B = -2 \left(\frac{k_1 + k_2}{m} \right) \Psi_B + \frac{k_1}{m} \Psi_A - \Gamma \dot{\Psi}_B \quad [2]$$

[1] + [2] :

$$\frac{\ddot{\Psi}_A + \ddot{\Psi}_B}{2} = - \left(\frac{k_1 + 2k_2}{m} \right) \frac{(\Psi_A + \Psi_B)}{2} - \Gamma \frac{(\dot{\Psi}_A + \dot{\Psi}_B)}{2} + \frac{F_0}{2m} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\phi}_1 = -\omega_1^2 \phi_1 - \Gamma \dot{\phi}_1 + \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \quad [A]$$

$$[1] - [2]:$$

$$\frac{\ddot{\psi}_A - \ddot{\psi}_B}{2} = -\frac{(3k_1 + 2k_2)}{m} \frac{\psi_A - \psi_B}{2} - \Gamma \left(\frac{\dot{\psi}_A - \dot{\psi}_B}{2} \right) + \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{\phi}_2 = -\omega_2^2 \phi_2 - \Gamma \dot{\phi}_2 + \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \quad [B]$$

[A], [B] son dos ecuaciones desacopladas.

Cada una tiene una solución homogénea y una particular

Como el amortiguamiento es débil ($\Gamma^2 \ll \frac{k_1 k_2}{m}$) puedo suponer el caso subamortiguado en la solución homogénea ($\Gamma^2 \ll \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$)

$$\phi_{1/2}^h(t) = C_{1/2} e^{-\Gamma t/2} \cos(\tilde{\omega}_{1/2} t + \phi_{1/2}) \quad (C_{1/2}; \phi_{1/2} \in \mathbb{R})$$

$$\text{con } \tilde{\omega}_{1/2} = \sqrt{\omega_{1/2}^2 - \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\omega_1, \omega_2 \text{ frecuencias normales})$$

La solución homogénea decae con el tiempo. Si miramos para tiempos suficientemente largos ($t \gg (1/\Gamma) \rightarrow$ es el tiempo característico dado por el amortiguamiento), sólo sobrevive la solución particular. Ésta está determinada por el forzado y los parámetros del problema.

$$\phi_{1/2}^p(t) = A_{1/2} \sin(\Omega t) + B_{1/2} \cos(\Omega t) \quad \text{con } a_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$\text{con } A_{1/2} = \frac{a_0 \Omega \Gamma}{(\omega_{1/2}^2 - \Omega^2)^2 - (\Gamma \Omega)^2}$$

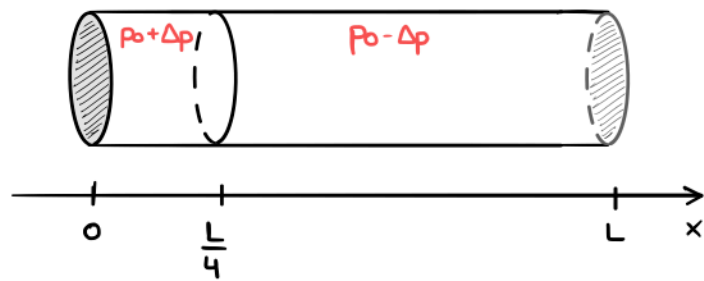
$$B_{1/2} = \frac{a_0 (\omega_{1/2}^2 - \Omega^2)}{(\omega_{1/2}^2 - \Omega^2)^2 - (\Gamma \Omega)^2}$$

$$\text{Si } \Omega \gg \omega_{1/2}$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{B}{A} = \frac{\omega_{1/2}^2 - \Omega^2}{\Gamma \Omega} \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{B \gg A} \rightarrow \text{sigue al forzado}$$

$$\phi_{1/2}^p(t) \approx B_{1/2} \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow \psi_B = (B_1 - B_2) \cos(\Omega t) \approx \frac{F_0}{m} \cdot \frac{k_1}{m} \cdot \frac{1}{\Omega^4} \cos(\Omega t)$$



Propongo soluciones de la forma

$$\delta p_n(x, t) = (A_n \sin(k_n x) + B_n \cos(k_n x)) \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

Condiciones de contorno

Condiciones de contorno de extremos cerrados : $\varphi_n(x_0, t) = 0$
 $\frac{\partial p}{\partial x}(x_0, t) = 0$

$$\frac{\partial \delta p_n}{\partial x} = k_n (A_n \cos(k_n x) - B_n \sin(k_n x)) \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

$$\left. \frac{\partial \delta p}{\partial x} \right|_{x=0} = k_n A_n \cos(\omega_n t + \theta_n) = 0 \quad \forall t \Rightarrow A_n = 0$$

$$\left. \frac{\partial \delta p}{\partial x} \right|_{x=L} = -B_n k_n \sin(k_n L) \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad \forall t \Rightarrow \sin(k_n L) = 0 \Rightarrow k_n = n\pi/L$$

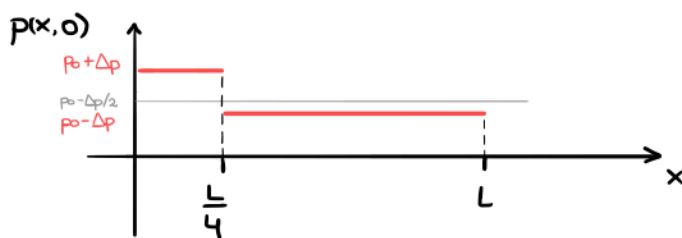
⇒ Los modos normales en los que puede oscilar la presión tienen la forma

$$\delta p_n(x, t) = B_n \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

La variación más general es entonces

$$\delta p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

Condiciones iniciales



$$\begin{aligned} P_{eq} &= \frac{1}{L} \left[\int_0^{L/4} (p_0 + \Delta p) dx + \int_{L/4}^L (p_0 - \Delta p) dx \right] \\ &= \frac{p_0 + \Delta p}{4} + (p_0 - \Delta p) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{p_0 + \Delta p + 3p_0 - 3\Delta p}{4} \\ &= p_0 - \frac{\Delta p}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta p(x, 0) = \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p & 0 \leq x < L/4 \\ -\frac{\Delta p}{2} & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

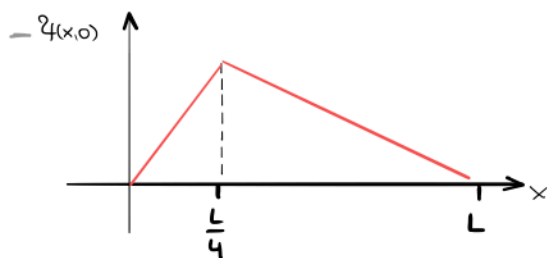
$$\text{Usando } \delta p(x, t) = -\gamma p_0 \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Rightarrow \varphi(x, 0) = \frac{-1}{\gamma p_0} \int \delta p(x, t) dx \Big|_{t=0} = \frac{-1}{\gamma p_0} \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p x + C & 0 \leq x < L/4 \\ -\frac{\Delta p}{2} x + C' & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

Las constantes C y C' deben ser tales que $\varphi(x, 0)$ satisfaga las condiciones de contorno

$$\varphi(0, 0) = C = 0$$

$$\varphi(L, 0) = -\frac{\Delta p}{2} L + C' = 0 \Rightarrow C' = \frac{\Delta p}{2} L$$

$$\Rightarrow \varphi(x, 0) = \frac{-1}{\gamma p_0} \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p x & 0 \leq x < L/4 \\ \frac{\Delta p}{2} (L - x) & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$



Igualemos la forma de $\delta p(x,0)$ obtenida a partir de evaluar la solución propuesta a la forma de $\delta p(x,0)$ que nos da el ejercicio, y haciendo lo mismo para $\dot{\varphi}(x,0)$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\theta_n) = \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p & 0 \leq x < L/4 \\ -\frac{\Delta p}{2} & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{8\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{1}{k_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \theta_n)$$

$$\dot{\varphi}(x,t) = \frac{1}{8\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\omega_n}{k_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \theta_n)$$

$$2) \dot{\varphi}(x,0) = \frac{1}{8\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\theta_n) = 0 \quad \forall x \rightarrow \text{Puedo satisfacer tomando } \theta_n = 0 \quad \forall n$$

Volviendo a (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p & 0 \leq x < L/4 \\ -\frac{\Delta p}{2} & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

Multiplicando a ambos lados por $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando en $x \in [0, L]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{L}{2} \delta_{nm} = \frac{3}{2} \Delta p \int_0^{L/4} dx \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \frac{\Delta p}{2} \int_{L/4}^L dx \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$A_m \frac{L}{2} = \frac{\Delta p}{2} \frac{L}{m\pi} \left[3 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \Big|_0^{L/4} - \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \Big|_{L/4}^L \right]$$

$$A_m = \frac{\Delta p}{m\pi} \left[3 \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) - \cancel{\sin(m\pi)} + \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \right] \quad \text{where } \sin(m\pi) = 0$$

$$A_m = \frac{2\Delta p}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \delta p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Delta p}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

$$q(x,t) = -\frac{1}{8p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Delta p L}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

Resolviendo con los desplazamientos

$$q(x,t) = -\frac{1}{8p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t + \phi_n)$$

$$\ddot{q}(x,t) = \frac{1}{8p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin(\omega_n t + \phi_n) \omega_n = 0 \rightarrow \phi_n = 0$$

$$q(x,t) = -\frac{1}{8p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

multiplicando por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e integrando en $x \in [0, L]$

$$\int_0^L q(x,0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = -\frac{1}{8p_0} \frac{A_m L}{m\pi} \frac{L}{2}$$

$$q(x,0) = -\frac{1}{8p_0} \begin{cases} \frac{3}{2} \Delta p x & 0 \leq x < L/4 \\ \frac{\Delta p}{2} (L-x) & L/4 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\int_0^L q(x,0) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \int_0^{L/4} dx \left(-\frac{3}{2} \frac{\Delta p}{8p_0} \right) x \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \int_{L/4}^L dx \left(-\frac{\Delta p}{2 \cdot 8p_0} \right) (L-x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{-\Delta p^3}{2 \cdot 8p_0} \left\{ -x \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \Big|_0^{L/4} + \int_0^{L/4} dx \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \right\} - \frac{\Delta p}{2 \cdot 8p_0} \left\{ -(L-x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \Big|_{L/4}^L - \int_{L/4}^L dx \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L}{m\pi} \right\}$$

$$= \frac{-\Delta p^3}{2 \cdot 8p_0} \left\{ -\frac{L}{4} \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \frac{L}{m\pi} + \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L^2}{(m\pi)^2} \Big|_0^{L/4} \right\} - \frac{\Delta p}{2 \cdot 8p_0} \left\{ \left(L - \frac{L}{4}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \frac{L}{m\pi} - \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \frac{L^2}{(m\pi)^2} \Big|_{L/4}^L \right\}$$

$$= \frac{\Delta p}{2 \cdot 8p_0} \left\{ \frac{3L}{4} \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \frac{L}{m\pi} - 3 \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 - \frac{3L}{4} \cos\left(\frac{m\pi}{4}\right) \frac{L}{m\pi} - \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2 \right\}$$

$$= \frac{-\Delta p^2}{8p_0} 2 \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{1}{8p_0}} \frac{A_m L}{m\pi} \frac{L}{2} = \cancel{\frac{\Delta p^2}{8p_0}} 2 \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right) \left(\frac{L}{m\pi}\right)^2$$

$$A_m = \frac{4\Delta p}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \delta p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Delta p}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

$$q(x,t) = -\frac{1}{8p_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\Delta p L}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t)$$

Problema 3

Datos: μ, T_0, A_0, a (Asumo $A_0 > 0$)a) $v = \sqrt{T_0/\mu}$, velocidad de propagaciónfórmula de D'Alembert $\phi_r(x,t)$

$$\phi(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2} [\phi(x-vt; 0)]}_{\phi_p} + \underbrace{\frac{1}{2} [\phi(x+vt; 0)]}_{\phi_r} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \cdot \underbrace{\frac{\partial \phi(x', 0)}{\partial t}}_{=0}$$

$= 0$
 $\downarrow$
 velocidad inicial nula
 (reposo)

$$\Rightarrow \boxed{\phi(x,t) = \phi_p(x,t) + \phi_r(x,t)}$$

$$\phi_p(x,t) = \begin{cases} \frac{A_0}{2} \cos\left[\frac{\pi}{a}(x-vt)\right] & ; \quad -\frac{a}{2} \leq x-vt \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

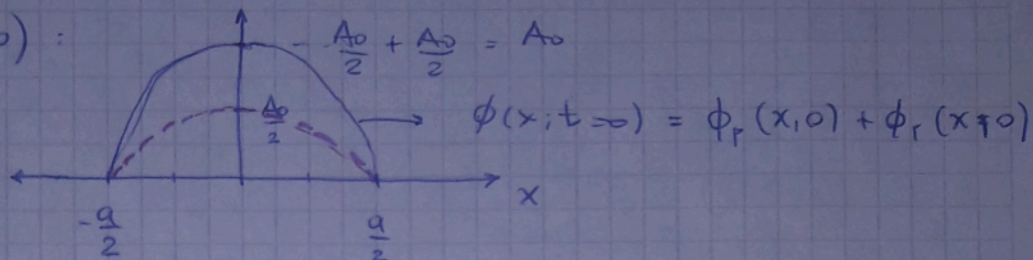
progresiva

$$\phi_r(x,t) = \begin{cases} \frac{A_0}{2} \cos\left[\frac{\pi}{a}(x+vt)\right] & ; \quad -\frac{a}{2} \leq x+vt \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

regresiva

Gráficos:

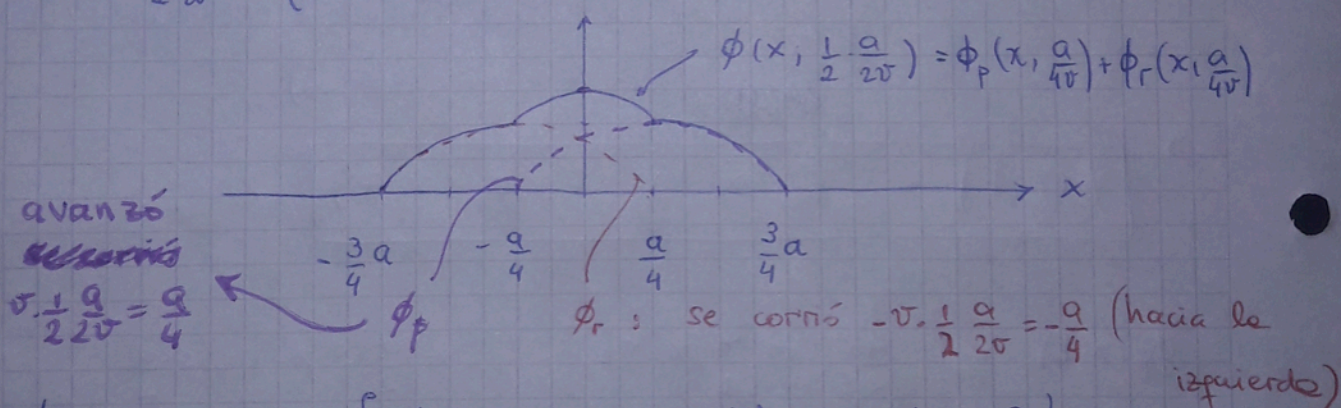
(i) $\phi(x, t=0)$:



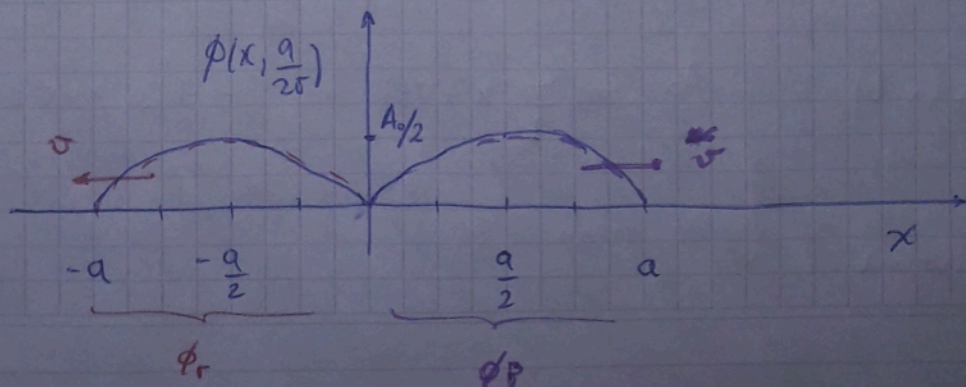
(ii) $\phi(x, t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2v})$:

$$\phi_p \Big|_{t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2v}} = \begin{cases} \frac{A_0}{2} \cos \left[\frac{\pi}{a} \left(x - \frac{a}{4} \right) \right] & \text{si } -\frac{a}{2} \leq x - \frac{a}{4} \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{4} \leq x \leq \frac{3a}{4} \end{cases}$$

$$\phi_r \Big|_{t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2v}} = \begin{cases} \frac{A_0}{2} \cos \left[\frac{\pi}{a} \left(x + \frac{a}{4} \right) \right] & \text{si } -\frac{3a}{4} \leq x \leq \frac{a}{4} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$



(iii) $\phi(x, t = \frac{a}{2v})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_p(x, \frac{a}{2v}) \rightarrow \text{avanzada: } \frac{a}{2} \\ \phi_r(x, \frac{a}{2v}) \rightarrow \text{retardada: } -\frac{a}{2} \end{array} \right\}$$


b) Energía (t) = $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot u(x,t)$: energía de la cuerda
 $\downarrow$
 densidad de energía de la cuerda

$$u(x,t) = u_c(x,t) + u_p(x,t)$$

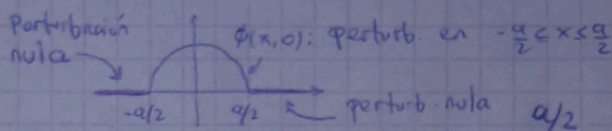
$\downarrow$ cinética $\downarrow$ potencial

$$u_c = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 ; \quad u_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

• En $t=0$:

$$E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot u(x,0) = \frac{1}{2} T_0 A_0^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \cdot \int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) dx$$

$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{integro toda la cuerda}} \quad \quad \quad \downarrow \text{ sólo potencial: } u_c(x,0)=0 \text{ (pues } \dot{\phi}|_{t=0}=0 \text{ : reposo)}$



$$E_0 = T_0 \cdot \frac{A_0^2 \pi^2}{4a} : \text{energía inicial (total)}$$

• En $t = \frac{a}{2v}$:

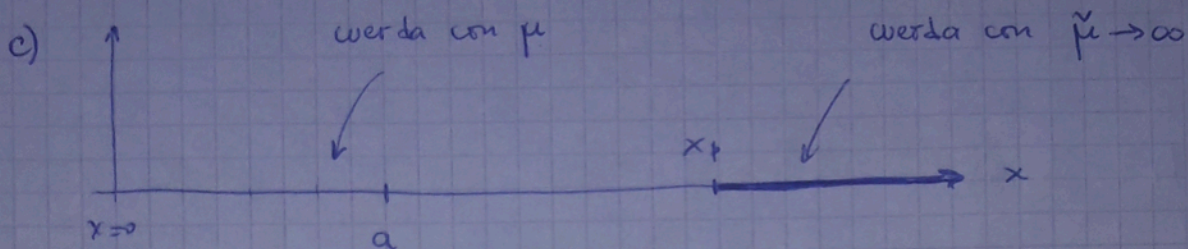
$\Rightarrow$ la energía de la cuerda en la ~~mitad~~ ^{región} $x > 0$

es $\boxed{\frac{1}{2} E_0}$ (pues no hay pérdidas)

cheques:

$$E(x>0, t = \frac{a}{2v}) = \int_0^{+\infty} (u_c + u_p) \Big|_{t=\frac{a}{2v}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \mu \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \int_0^{+\infty} \left(\underbrace{\mu v^2}_{T_0} + T_0 \right) \sin^2 \left[\frac{\pi}{a} \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] dx = \frac{T_0}{2} \frac{A_0^2 \pi^2}{4a} = \frac{1}{2} E_0 \quad \checkmark$$



la parte progresiva (ϕ_p) avanza hacia la derecha y se refleja ante el cambio de impedancia en $x = x_p$.

Considerando $\tilde{\mu} \rightarrow \infty$ (densidad infinita para $x > x_p$)

$\Rightarrow$ no habrá perturbación transmitida:

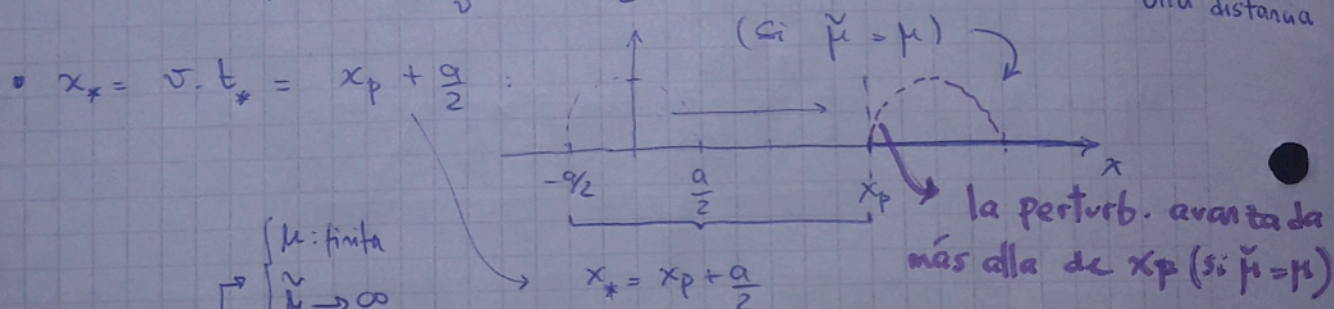
• Planteo: $\phi_p(x = x_p, t) + \phi_{\text{reflejada}}(x = x_p, t) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi_p(x_p, t) = -\phi_{\text{reflej.}}(x_p, t)}$

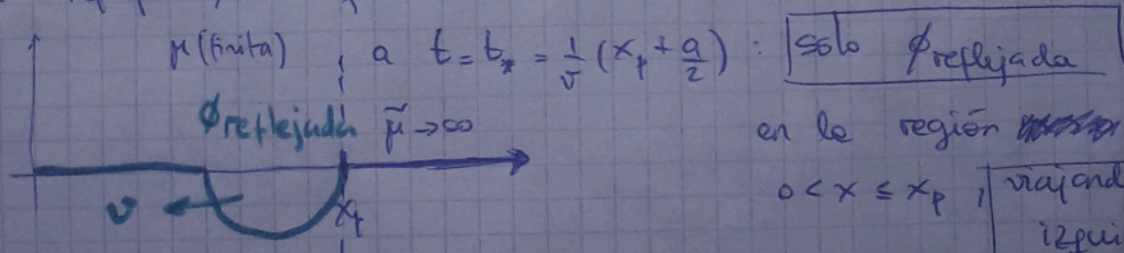
no hay transmitida

► Si $\tilde{\mu} = \mu$ (finita):

$\Rightarrow$ a un tiempo $t_* = \frac{1}{v}(x_p + \frac{a}{2})$ la perturb. avanzaría ~~una distancia~~ x_* :



► Considerando ~~la perturb. avanzada~~ $\Rightarrow$ en $t = t_*$ la perturbación ya se reflejó y no puede nada avanzando hacia la derecha:



en la región ~~avanzada~~

$0 < x \leq x_p$, viajando a izquierda con veloc. v .

$\boxed{\text{Energía}} = \frac{1}{2} E_0$ (sin pérdidas)

NOTA

$0 < x \leq x_p$

$t = t_* = \frac{1}{v}(x_p + \frac{a}{2})$