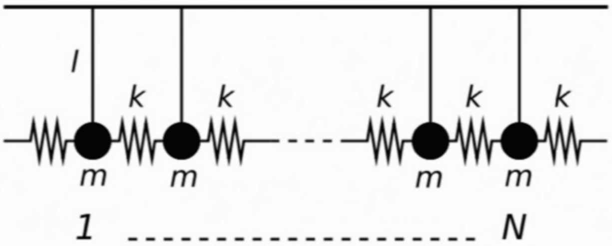
Oscilaciones forzadas en sistemas periódicos

23. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura. Donde todos los resortes tienen la misma longitud natural l_0



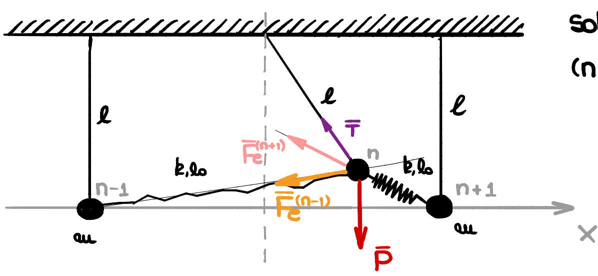
a) Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 11 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

b) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.

c) Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.

El ejercicio está pensado para hacerse usando resultados obtenidos anteriormente, entonces, resulta mucho más corto de lo que va a parecer acá.

El ítem (a) nos pide la ecuación de movimiento para una masa cualquiera, que llamamos la masa n. Para eso analizamos cuáles son las fuerzas que actúan sobre la masa. Encontramos el peso, la tensión de la cuerda y dos fuerzas restitutivas que ejercen sobre ella los resortes que la vinculan con la masa (n-1) y (n+1) respectivamente.

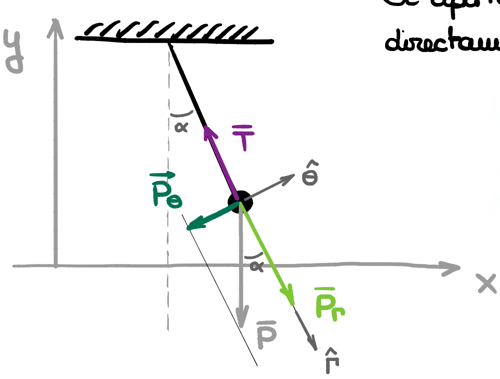


OBS: Aunque el enunciado no lo dice explícitamente, tenemos que considerar el límite de pequeñas oscilaciones.

OBS 2: Tomamos directamente una distancia l_0 entre cuerda y cuerda, usando que en el ejercicio (6) encontramos que de esa forma existe una situación de equilibrio estable en torno a la cuál oscilar.

Análisis de las fuerzas

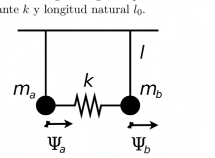
• Peso y tensión



El aporte a las ecuaciones de Newton que hace la fuerza $\vec{P}$ puede tomarse directamente de los ejercicios (1.a) o (6)

Pulsaciones entre modos normales

6. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0.



Oscilador armónico de un único grado de libertad

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

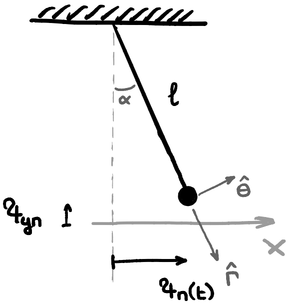
a) Péndulo de longitud l en presencia de un campo gravitatorio de constante g. Discuta todas las aproximaciones que realiza.

Si lo hacemos de nuevo vemos que P puede descomponerse en una componente radial y una componente tangencial (en $\hat{\theta}$)

$$\vec{P}_r = mg\cos(\alpha)\,\hat{r}$$

$$\vec{P}_\theta = -mg\sin\alpha\,\hat{\theta}$$

Observando el dibujo, podemos escribir $\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ en términos de los desplazamientos de las partículas respecto de su posición de equilibrio y de los datos del problema.



$$\cos(\alpha) = \frac{AD}{HIP} = \frac{\ell-\psi_{yn}}{\ell} \Rightarrow \vec{P}_r = m\frac{g}{\ell}(\ell-\psi_{yn}(t))\,\hat{r}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{OP}{HIP} = \frac{\psi_n}{\ell} \qquad \vec{P}_\theta = -m\frac{g}{\ell}\psi_n(t)\,\hat{\theta}$$

Nos interesa ver las fuerzas en la dirección $\hat{\theta}$

En la dirección radial no hay movimiento, debido al vínculo que representa la soga. La ecuación

$$P_r - T = m(\cancel{\ddot{r}} - \overset{\ell}{\cancel{r}}\dot{\theta}^2)$$

$$mg\cos\alpha - T = -m\ell\dot{\theta}^2$$

sólo nos dice cuál es la tensión que deberá ejercer la soga para que el movimiento sea posible.

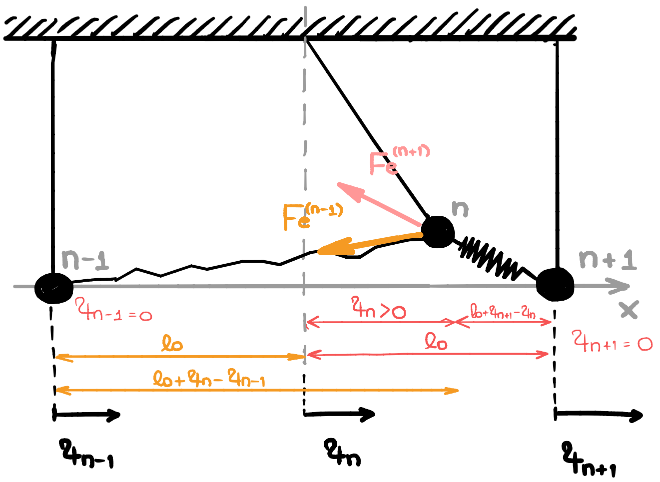
Por último usando la aproximación de desplazamientos pequeños

$$\vec{P}_\theta = -m\frac{g}{\ell}\psi_n(t)\hat{\theta} = -m\frac{g}{\ell}\psi_n(t)(\cos(\alpha)\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}) = -m\frac{g}{\ell}\psi_n(t)\underbrace{\frac{\ell-\overset{\ll\ell}{\psi_{yn}}}{\ell}}_{\sim 1}\hat{x} - \cancel{m\frac{g}{\ell^2}\psi_n^2(t)\,\hat{y}}$$

$$\frac{\psi_n^2}{\ell^2} \ll \frac{\psi_n}{\ell} \ll 1$$

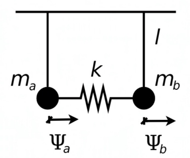
$\Rightarrow$ Vamos a necesitar para la ecuación de movimiento $\boxed{\vec{P}_\theta \approx -m\frac{g}{\ell}\psi_n\,\hat{x}}$

• FUERZAS ELÁSTICAS



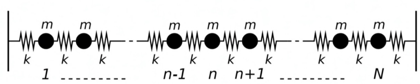
Esta parte tampoco es necesario empezarla desde cero como vamos a hacer acá, sino que puede usar se resultados como los de los ejercicios (6) y (11).

6. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferente mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0.



Modos normales en sistemas periódicos

11. Considere el sistema de N masas unidas a resortes de constante elástica k y longitud na mostrado en la figura.



a) Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento tra para la partícula enésima.

Vamos a pensar las fuerzas en la situación del dibujo, en la cual las masas $(n-1)$ y $(n+1)$ se encuentran en su posición de equilibrio (es decir $\psi_{n-1} = \psi_{n+1} = 0$) y sólo la masa n se ha desplazado $(\psi_n\hat{x} + \psi_{yn}\hat{y})$

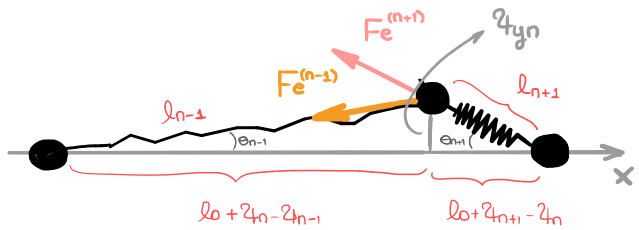
La elongación de cada uno de estos resortes es

$$\ell_{n+1} = \sqrt{\psi_{yn}^2 + (\ell_0+\psi_{n+1}-\psi_n)^2}$$

$$\ell_{n-1} = \sqrt{\psi_{yn}^2 + (\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2}$$

$$\Rightarrow |F_e^{n+1}| = k(\ell_{n+1}-\ell_0) = k\left(\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_{n+1}-\psi_n)^2} - \ell_0\right)$$

$$|F_e^{n-1}| = k(\ell_{n-1}-\ell_0) = k\left(\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2} - \ell_0\right)$$



$$\vec{Fe}^{\,n-1}_x = |\vec{Fe}^{\,n-1}|\cos(\theta_{n-1})\,\hat{x}$$

$$= -k\Big(\underbrace{\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2}}_{\approx\, \ell_0+(\psi_n-\psi_{n-1})+\mathcal{O}(\psi^2)} - \ell_0\Big)\frac{\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1}}{\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2}}\,\hat{x}$$

en la aproximación de $\psi \ll \ell$

$$\approx -k(\cancel{\ell_0}+\psi_n-\psi_{n-1}-\cancel{\ell_0})\underbrace{\frac{\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1}}{\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1}}}_{=1}\,\hat{x}$$

$$= -k(\psi_n-\psi_{n-1})\,\hat{x}$$

$$\vec{Fe}^{\,n-1}_y = |\vec{Fe}^{\,n-1}|\sin(\theta_{n-1})\,\hat{y}$$

$$= -k\Big(\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2} - \ell_0\Big)\frac{\psi_{yn}}{\sqrt{\psi_{yn}^2+(\ell_0+\psi_n-\psi_{n-1})^2}}\,\hat{y}$$

$$\approx -k(\cancel{\ell_0}+\psi_n-\psi_{n-1}-\cancel{\ell_0})\frac{\psi_{yn}}{\ell_0+\cancel{\psi_n-\psi_{n-1}}_{\ll \ell_0}}\,\hat{y}$$

$$= -k(\psi_n-\psi_{n-1})\frac{\psi_{yn}}{\ell_0}\,\hat{y}$$

$|Fe^{n-1}_y|$ es de orden 2 en los desplazamientos
$\Rightarrow$ a orden 1 en los desplazamientos ψ, $|Fe^{n-1}_y| = 0$

Análogamente encuentro las componentes de la otra fuerza, de forma que

$$\vec{Fe}^{\,n-1}_x = -k(\psi_n-\psi_{n-1})\,\hat{x}$$

$$\vec{Fe}^{\,n+1}_x = k(\psi_{n+1}-\psi_n)\,\hat{x}$$

OBS: Revisemos los signos
En la configuración que elegimos para pensar las fuerzas $\psi_n>0$ mientras que $\psi_{n+1}=\psi_{n-1}=0$. Entonces, el factor $(\psi_n-\psi_{n-1})$ que aparece en Fe^{n-1}_x es positivo y para que la fuerza quede en la dirección $(-\hat{x})$ hay que poner un signo "−" explícito. Por otro lado, el factor $(\underbrace{\psi_{n+1}}_{=0}-\underbrace{\psi_n}_{>0})<0$, entonces, para obtener una fuerza en dirección $(-\hat{x})$ no hay que agregar ningún signo.

- ECUACIÓN DE NEWTON EN $\hat{x}$

Juntando todas las expresiones que encontramos para las fuerzas

$$m\,\ddot{\psi}_n(t) = \underbrace{\vec{Fe}^{\,n-1}_x}_{-k(\psi_n-\psi_{n-1})} + \underbrace{\vec{Fe}^{\,n+1}_x}_{k(\psi_{n+1}-\psi_n)} + \underbrace{\vec{P}_\theta}_{-mg\frac{\psi_n}{\ell}}$$

$$\cancel{m}\,\ddot{\psi}_n(t) = -\frac{k}{m}(\psi_n(t)-\psi_{n-1}(t)) + \frac{k}{m}(\psi_{n+1}(t)-\psi_n(t)) - \cancel{m}\frac{g}{\ell}\psi_n(t)$$

Llamando $\omega_0^2 = g/\ell$, $\omega_1^2 = k/m$

$$\boxed{\ddot{\psi}_n(t) = \omega_1^2\big(\psi_{n+1}(t)-2\psi_n(t)+\psi_{n-1}(t)\big) - \omega_0^2\,\psi_n(t)}$$

Ecuación de movimiento para la masa n.

Habiendo encontrado la ecuación que debe satisfacer el movimiento de la masa n, el ejercicio nos dice que propongamos una solución del tipo

$$\psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos\left(nk^{(p)}l_0 + \alpha^{(p)}\right)\cos(\omega^{(p)}t + \theta^{(p)})$$

n etiqueta las masas

(p) etiqueta los modos

Estamos proponiendo una solución donde todas las masas oscilan con la misma frecuencia $\omega^{(p)}$ → es una solución tipo modo normal

Reemplazando la solución propuesta en la ecuación

$$-\omega^{(p)2}\cancel{A^{(p)}}\cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}) = -(\omega_0^2+2\omega_1^2)\cancel{A^{(p)}}\cos(k^{(p)}nl_0+\alpha^{(p)}) + \omega_1^2\cancel{A^{(p)}}\left[\underbrace{\cos((n-1)k^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}) + \cos((n+1)k^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})}\right]$$

Si logro quedarme con $\cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})$ entonces puedo cancelarlo, porque resulta un factor común

$$\cos((n-1)k^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}) + \cos((n+1)k^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}) = \cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}-k^{(p)}l_0) + \cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)}+k^{(p)}l_0)$$

$$= \cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})\cos(k^{(p)}l_0) + \cancel{\sin(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})\sin(k^{(p)}l_0)} + \cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})\cos(k^{(p)}l_0) - \cancel{\sin(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})\sin(k^{(p)}l_0)}$$

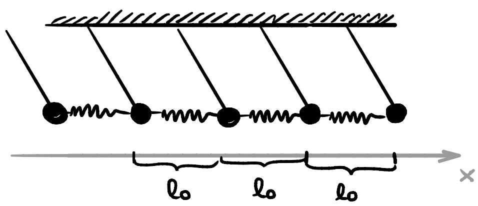
$$= 2\cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})\cos(k^{(p)}l_0)$$

$$-\omega^{(p)2}\cancel{\cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})} = \left[-(\omega_0^2+2\omega_1^2) + \omega_1^2\cdot 2\cos(k^{(p)}l_0)\right]\cancel{\cos(nk^{(p)}l_0+\alpha^{(p)})}$$

$$\boxed{\omega^{(p)2} = \omega_0^2 + 2\omega_1^2\left(1-\cos(k^{(p)}l_0)\right)}$$

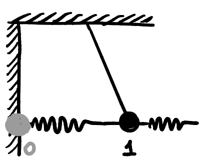
Relación de dispersión

Como $-1 \leq \cos(k^{(p)}l_0) \leq 1$, vemos que la frecuencia más baja posible es $\omega^{(p)2} = \omega_0^2 = g/l$. Corresponde a un movimiento en el cual todas las masas oscilando con la frecuencia natural del péndulo, sin elongar ni contraer ningún resorte.



El ítem (b) queda para ustedes

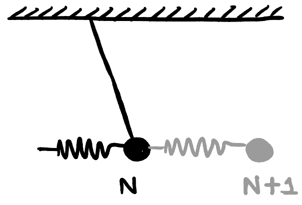
En el item (c) nos dan cuáles son las condiciones de contorno del sistema, estando uno de los extremos fijo y el otro libre. Veamos qué restricciones implican estas condiciones sobre los posibles modos de oscilación del sistema. (Cómo imponer estas condiciones de contorno se aprende en el ej (11))



EXTREMO FIJO

La forma de imponer que la masa 1 esté vinculada mediante un resorte a un punto fijo es pensar en que, si estuviera sujeta a una masa extra (ubicada en la posición 0) esta masa extra estaría fija en el punto (es decir no se desplazaría → $\psi_0(t) = 0 \ \forall t$)

$$\psi_0^{(p)}(t) = A^{p}\cos(\alpha^{(p)})\cos(\omega^{(p)}t+\theta^{(p)}) = 0 \ \forall t \implies \alpha^{(p)} = \pi/2 \text{ satisface}$$



EXTREMO LIBRE

Para que la masa N se comporte como un extremo libre, vemos que, de pensar a la masa N sujeta a una masa extra N+1, esta masa extra debería acompañar el movimiento de la masa N (de otra forma impondría fuerzas de vínculo sobre la masa N en el extremo en el cuál la queremos libre)

$$\psi^{(P)}_{N+1}(t) = \psi^{(P)}_N(t) \quad \forall\, t$$

$$\cancel{A^{(P)}} \cos((N+1)k^{(P)}l_0 + \pi/2)\, \cancel{\cos(\omega^{(P)}t + \theta^{(P)})} = \cancel{A^{(P)}} \cos(Nk^{(P)}l_0 + \pi/2)\, \cancel{\cos(\omega^{(P)}t + \theta^{(P)})}$$

$$\underbrace{\cos((N+1)k^{(P)}l_0 + \pi/2) = \cos(Nk^{(P)}l_0 + \pi/2)}$$

Esta condición es menos trivial de resolver

Mirando una función $\cos(x)$ vemos que hay dos formas en las cuales dos valores de x distintos x_1 y x_2 den el mismo valor de $\cos(x)$. Una es que difieran en un número entero de períodos (ejemplo en violeta)

$x_2 = x_1 + n2\pi$

La otra (ejemplo en rosa) es que se encuentren equidistantes a un extremo, es decir, que haya un máximo o mínimo en el medio de los dos valores de x

$\cos\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \pm 1$

La opción 2 da un resultado no-trivial (tomamos $x_1 = Nk^{(P)}l_0 + \alpha^{(P)}$, $x_2 = (N+1)k^{(P)}l_0 + \alpha^{(P)}$)

$$\frac{(N+1)k^{(P)}l_0 + \pi/2 + Nk^{(P)}l_0 + \pi/2}{2} = p\pi$$

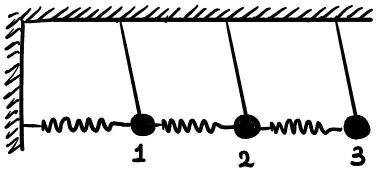
$$\frac{(2N+1)\, k^{(P)}\, l_0 + \pi}{2} = p\pi$$

$$\boxed{k^{(P)} = \frac{2p-1}{2N+1}\frac{\pi}{l_0}}$$

$$\Rightarrow \quad \psi^{(P)}_n(t) = A^{(P)} \cos\left(\frac{2p-1}{2N+1} n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega^{(P)}t + \theta^{(P)})$$

Para excitar el primer armónico (p=1) podemos tomar $\dot{\psi}_n(t=0) = 0\ \forall n$ y desplazamientos $\psi_n(t=0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2N+1} + \frac{\pi}{2}\right)$ para cada partícula (pueden comprobarlo)

d) Debemos especificar ahora para el caso en el cuál hay 3 masas. Vamos a ver cómo al quedarnos con pocas masas recuperamos la apariencia que tenían los problemas del principio de la guía, donde teníamos 2 o 3 masas.



$$\boxed{\ddot{q}_n(t) = \omega_1^2\left(q_{n+1}(t)-2q_n(t)+q_{n-1}(t)\right) - \omega_0^2 q_n(t)}$$

$\Downarrow$ N=3

n=1: $\ddot{q}_1(t) = \omega_1^2\left(q_2(t)-2q_1(t)\right) - \omega_0^2 q_1(t)$

n=2: $\ddot{q}_2(t) = \omega_1^2\left(q_3(t)-2q_2(t)+q_1(t)\right) - \omega_0^2 q_1(t)$

n=3: $\ddot{q}_3(t) = \omega_1^2\left(-2q_3(t)+q_2(t)\right) - \omega_0^2 q_3(t)$

La solución más general para cada masa es

$$q_n(t) = \sum_{p=1}^{3} A^{(p)} \cos\left(\frac{2p-1}{7}n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\omega^{(p)}t+\theta^{(p)}) = \sum_{p=1}^{3} \cos\left(\frac{2p-1}{7}n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\Phi^{(p)}(t)}$$

Llamé $\Phi^{(p)}(t)$ a las funciones

$$\Phi^{(p)}(t) = A^{(p)}\cos(\omega^{(p)}t+\theta^{(p)})$$

$$\rightarrow q_1(t) = \overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)}^{p=1,n=1}\Phi^{I}(t) + \overbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)}^{p=2,n=1}\Phi^{II}(t) + \overbrace{\cos\left(\frac{5\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)}^{p=3,n=1}\Phi^{III}(t)$$

$$q_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{I}(t) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{II}(t) + \cos\left(\frac{10\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{III}(t)$$

$$q_3(t) = \cos\left(\frac{3\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{I}(t) + \cos\left(\frac{9\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{II}(t) + \cos\left(\frac{15\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right)\Phi^{III}(t)$$

OBS: Miren como llegamos a algo que se ve igual a lo que obteníamos para el movimiento de cada masa en los ejercicios con 2 y 3 masas. Es que hicimos lo mismo! Buscamos estas soluciones "especiales" en las cuales todas las partes móviles oscilan con la misma frecuencia (los modos normales) y escribimos el movimiento más general de cada masa como una combinación lineal de modos (porque una combinación lineal de soluciones es también solución de nuestra ecuación y sabemos que no existen más soluciones L.I.). La diferencia estuvo en cómo encontramos los modos $\Phi^{(p)}(t)$, por la dificultad de diagonalizar una matríz de N×N cuando no fijamos N!.

Usando propiedades de las funciones trigonométricas, por ejemplo $\cos\left(\frac{15}{7}\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$, se puede simplificar lo de arriba a

$$q_1(t) = -\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Phi^{I}(t) - \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\Phi^{II}(t) - \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\Phi^{III}(t)$$

$$q_2(t) = -\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\Phi^{I}(t) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Phi^{II}(t) + \cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\Phi^{III}(t)$$

$$q_3(t) = -\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)\Phi^{I}(t) + \cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)\Phi^{II}(t) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Phi^{III}(t)$$

$\longrightarrow$ Llamando $a_1 = -\sin(\pi/7)$, $a_2 = -\cos(\pi/14)$, $a_3 = -\cos(3\pi/14)$

$$q_1(t) = a_1\Phi^{I}(t) + a_2\Phi^{II}(t) + a_3\Phi^{III}(t)$$

$$q_2(t) = a_3\Phi^{I}(t) + a_1\Phi^{II}(t) - a_2\Phi^{III}(t)$$

$$q_3(t) = a_2\Phi^{I}(t) - a_3\Phi^{II}(t) + a_1\Phi^{III}(t)$$

Lo que puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi^{I} \\ \Phi^{II} \\ \Phi^{III} \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \bar{M}\,\vec{\Phi}$$

e) El último ítem incluye un forzado que antes no estaba y nos propone usar las coordenadas normales del problema sin forzar. Si bien son dos problemas diferentes, son también muy parecidos, de forma que la propuesta parece algo que podría funcionar.

Las nuevas ecuaciones son

$$\ddot{q}_1(t) = \omega_1^2(q_2(t)-2q_1(t)) - \omega_0^2 q_1(t)$$
$$\ddot{q}_2(t) = \omega_1^2(q_3(t)-2q_2(t)+q_1(t)) - \omega_0^2 q_1(t)$$
$$\ddot{q}_3(t) = \omega_1^2(-2q_3(t)+q_2(t)) - \omega_0^2 q_3(t) + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_1^2-\omega_0^2 & \omega_1^2 & 0 \\ \omega_1^2 & -2\omega_1^2-\omega_0^2 & \omega_1^2 \\ 0 & \omega_1^2 & -2\omega_1^2-\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0/m \end{pmatrix} \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\vec{q}} = \bar{\bar{T}}\vec{q} + \vec{F}\cos(\omega t)$$

Usando que en el ítem anterior encontramos como escribir $\vec{q}$ en términos de las coordenadas normales $\vec{\Phi}$

$$\bar{\bar{M}}\ddot{\vec{\Phi}} = \bar{\bar{T}}\bar{\bar{M}}\vec{\Phi} + \vec{F}\cos(\omega t)$$

OBS: Esta es una forma más mecánica de hacer lo mismo que hicimos para el ejercicio (10) en clase.

Multiplicando en todos lados por $\bar{\bar{M}}^{-1}$

$$\underbrace{M^{-1}M}_{\mathbb{1}}\ddot{\vec{\Phi}} = \underbrace{M^{-1}TM}_{D}\vec{\Phi} + M^{-1}\vec{F}\cos(\omega t)$$

↳ matriz diagonal con los autovalores

$$\ddot{\vec{\Phi}} = \bar{\bar{D}}\vec{\Phi} + \vec{F}'\cos(\omega t)$$

$$F' = \begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ F_3' \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_0/m \end{pmatrix}$$

Entonces, para cada coordenada normal la ecuación está desacoplada, y es

$$\ddot{\Phi}^{(p)} = -\omega_{(p)}^2\Phi^{(p)} + \underbrace{F^{(p)}}\cos(\omega t) \quad ; \; i=\{1,2,3\}$$

Estas $F^{(p)}$ se encuentran invirtiendo la matriz M que ya encontramos en (d) y multiplicando por $\vec{F} = (0,0,F_0/m)^T$. Como M^{-1} es algo feo, vamos a ignorar ese paso y quedarnos con "F_i" que no conocemos, aunque sabemos cómo obtenerlas.

Esta ecuación es EXACTAMENTE la del ejercicio (4), con $\Gamma=0$ $\Rightarrow$ ya sabemos como son las soluciones estacionarias de esta ecuación

$$\Phi^{(p)}(t) = \cancelto{\Gamma=0}{\frac{F^{(p)}\,\Gamma\omega}{(\omega^{(p)2}-\omega^2)^2+(\Gamma\omega)}}\sin(\omega t) + \frac{F^{(p)}(\omega^{(p)2}-\omega^2)}{(\omega^{(p)2}-\omega^2)^2+(\cancel{\Gamma\omega})}\cos(\omega t) = F^{(p)}\underbrace{\frac{1}{\omega^{(p)2}-\omega^2}}\cos(\omega t)$$

Las frecuencias de resonancia, que dan soluciones de amplitud infinita son las frecuencias naturales del sistema $\omega^{(p)}$