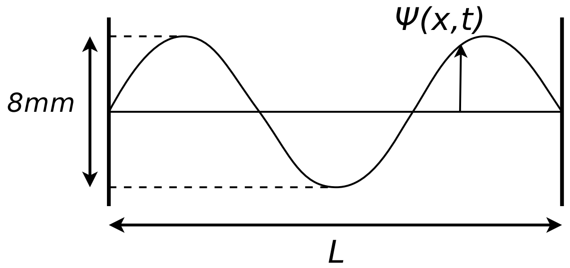
Propagación de ondas en medios continuos

1. Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.
   - $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda(x-vt)^2}$
   - $\Psi(x,t) = \beta(x+vt)$
   - $\Psi(x,t) = A\sin\left[k(x-vt)\right]$
   - $\Psi(x,t) = B\sin^2(kx-\omega t)$
   - $\Psi(x,t) = C\cos(kx)\sin(\omega t)$
   - $\Psi(x,t) = De^{i(kx-\omega t)}$

Onda estacionaria en cuerda como superposición de viajeras

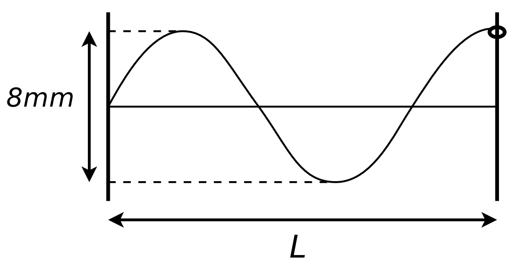
2. Se tiene una cuerda de longitud $L = 0,6\,\text{m}$, fija en sus dos extremos, que se encuentra oscilando en uno de sus modos normales como se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80\text{m/s}$.



   a) Escribir $\Psi(x,t)$ (la elongación en un punto de la cuerda), sabiendo que a $t = 0$ la elongación de todos los puntos es nula; que la amplitud total máxima de la onda es de 8mm, y que $\dot{\Psi}(L/2,0) > 0$

   b) Hallar $\Psi_1(x-vt)$ y $\Psi_2(x+vt)$ tales que $\Psi(x,t) = \Psi_1(x-vt) + \Psi_2(x+vt)$, es decir: escribir a $\Psi(x,t)$ como la superposición de dos ondas viajeras.

3. Se tiene una cuerda de longitud $L = 1\text{m}$, con un extremo fijo y uno libre, oscilando en el modo normal que se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80\text{m/s}$, y el desplazamiento de las partículas a $t = 0$ es el máximo posible para este modo, siendo $\Psi(L,0) > 0$. La amplitud total máxima es de $8\,\text{mm}$.

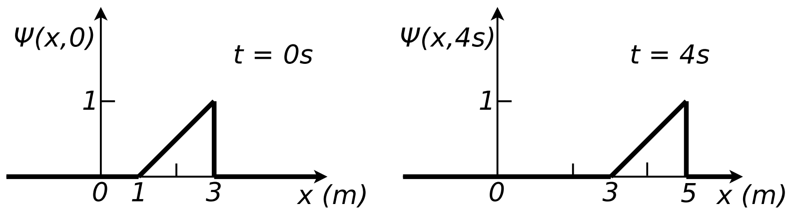


   a) Resolver, para esta situación, todo lo pedido en el problema anterior.

   b) Si ahora la cuerda está oscilando en un modo normal arbitrario n, con las mismas condiciones iniciales dadas arriba, repetir (a) (expresar en función de n).

Propagación en medios no dispersivos

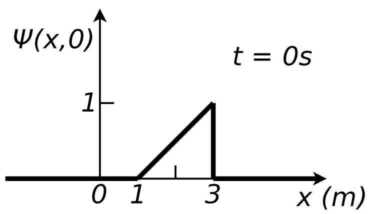
4. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad v. Se toman dos "fotografías" de la perturbación, a $t = 0$ s y $t = 4$ s:



   a) Hallar v.

   b) Hallar $\Psi(x,t)$.

5. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es $v = 100$ m/s (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). A $t = 0$ se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta (desde el reposo).



   a) Hallar $\Psi(x,t) = \Psi_1(x - vt) + \Psi_2(x + vt)$. Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de $\Psi(x,t)$.

   b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

6. Se tiene una cuerda homogénea de longitud L y densidad μ, a una tensión T, con sus dos extremos fijos ($x = 0$ y $x = L$). A $t = 0$ se la perturba de forma tal que

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ h\frac{x-a}{L/2-a} & \text{si } a < x < L/2 \\ h\frac{L-a-x}{L/2-a} & \text{si } L/2 < x < L-a \\ 0 & \text{si } L-a < x < L. \end{cases}$$

   Se suelta la cuerda desde el reposo; considerar $h \ll L$.

   a) Hallar $\Psi(x,t)$ y demostrar que siempre es posible escribir esta solución como una superposición de una onda que se propaga hacia la derecha y una que se propaga hacia la izquierda.

   b) Hacer un esquema cualitativo del movimiento de la cuerda para los instantes $t_n = n\frac{L}{8v}$, donde v es la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y n es un número natural.

Ecuación de onda

7. La ecuación de una onda transversal en una cuerda está dada por: $y(x,t) = 0,1\,\mathrm{m}\sin\left[\pi\left(x\,\mathrm{m}^{-1} - 4\mathrm{t}\,\mathrm{s}^{-1}\right)\right]$ (x e y en metros y t en segundos). Determine:

   a) La amplitud de la onda.

   b) La frecuencia de vibración de la cuerda.

   c) La velocidad de propagación de la onda.

   d) En $t = 1$ s, evaluar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un segmento pequeño de cuerda ubicado en $x = 2$ m.

8. Sea una onda transversal plana y armónica, cuya frecuencia angular vale $\omega = 10\ \mathrm{s}^{-1}$ y cuyo número de onda es $k = 100\ \ \mathrm{m}^{-1}$. En $x_1 = 1$ km y $t_1 = 1$ s la fase de la onda es $\nu(1\,\mathrm{km}, 1\,\mathrm{s}) = 3\pi/2$.

   a) ¿Cuánto vale la fase en x_1 para $t = 0$ s?

   b) Considerando que $\nu(x,t) = kx - \omega t + \nu_0$, ¿cuánto vale ν_0?

   c) ¿A qué velocidad se propaga la onda?

   d) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el frente de onda que se hallaba en x_1 llegue a $x = 2x_1$?

9. Una cuerda larga con $\mu = 0{,}005$ kg/m se tensa aplicando una fuerza de 0,25 N. El extremo izquierdo se mueve hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple de período 0,5 s y amplitud 0,2 m; se supone que la tensión permanece constante en todo el movimiento. Encontrar:

   a) La velocidad de la onda generada en la cuerda, la frecuencia y la longitud de onda.

   b) La expresión matemática para el desplazamiento: $y(x,t)$.

   c) La energía cinética media por unidad de longitud, de una partícula del medio.

   d) La energía potencial media por unidad de longitud, de una partícula.

Reflexión y transmisión de ondas

10. Se tienen dos cuerdas semi–infinitas, de densidades lineales ρ_1 y ρ_2, unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión T. Sobre la primera cuerda (la de densidad ρ_1) incide una onda de la forma: $\phi_i(x,t) = A_i\cos(k_1x - \omega t)$. Se conocen: ρ_1, ρ_2, T, ω y A_i.

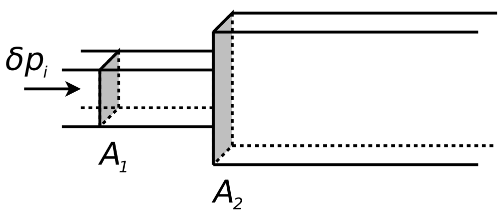
    a) Calcule k_1 y k_2, es decir, los números de onda de cada lado de la unión.

    b) Plantee la solución más general para $\phi(x,t)$ de cada lado de la unión.

    c) ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?

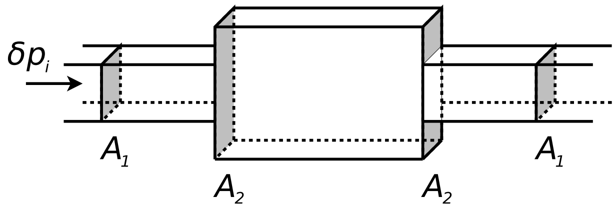
    d) Usando (b) y (c), calcule la perturbación $\phi(x,t)$ en cada una de las cuerdas.

11. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma $\delta p_i(x,t) = A_i\cos(k_1x - \omega t)$ incide desde el primer caño hacia $x > 0$. Hallar las amplitudes de presión y elongación de las ondas reflejadas y transmitidas.



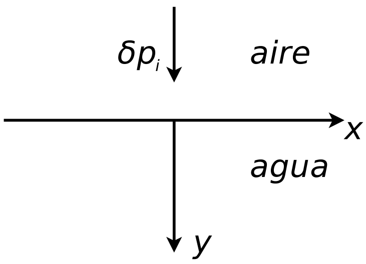
Datos: A_1, A_2, presión media P_0, densidad media ρ_0, v_s, ω, A_i. Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.

12. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar $\delta p(x,t)$ y $\Psi(x,t)$ en cada tramo.

13. Se tiene una interfase plana e infinita entre aire y agua (ver figura).

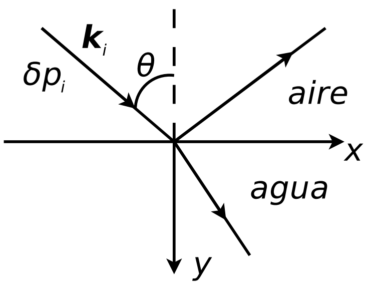


Desde el aire incide una onda acústica plana cuya dirección de propagación es normal a la interfase; se escribe $\delta p_i(y,t) = A_i \cos(k_1 y - \omega t)$. Hallar las ondas reflejadas y transmitidas $\delta p_r(y,t)$ y $\delta p_t(y,t)$.

14. *a*) Demuestre que la función: $\Psi(\mathbf{r},t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)}$, con $\mathbf{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$ un vector constante y $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, es solución de la ecuación de ondas tridimensional. Sugerencia: exprese el laplaciano en coordenadas cartesianas.

    b) Analice el significado físico de $\Psi(\mathbf{r},t)$. ¿Cómo son los frentes de onda? ¿Cuál es la relación entre el vector $\mathbf{k}$ y los frentes de onda? ¿Hacia dónde se desplazan los frentes de onda al transcurrir t? ¿A qué velocidad?

    c) Rehaga el problema anterior suponiendo que la onda incidente (desde el aire) forma un ángulo θ con la normal a la interfase (ver figura).



Por lo tanto la onda de presión incidente se escribe, si usamos notación compleja: $\delta p_i(\mathbf{r},t) = A_i e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, siendo $\mathbf{k}_i = \frac{\omega}{v_s}(\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y})$. Hallar las ondas reflejadas y transmitidas, $\delta p_r(\mathbf{r},t) = A_r e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ y $\delta p_t(\mathbf{r},t) = A_t e^{i(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$.