

Velocidad de fase y velocidad de grupo

15. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_f están relacionadas por:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

¿Cómo es $\frac{dv_f}{d\lambda}$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

Transformada de Fourier

16. Si $\Psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0 , y cero en otra parte; vea que $\phi(t)$ está dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2} \right] e^{i\omega_0 t}$$

a) Grafique $\Psi(\omega)$ y $|\phi(t)|$.

b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T , $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

17. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen.

a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right].$$

Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0 . Note que el pulso está centrado en $x = 0$ y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$ (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\alpha(k - k_0)].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\beta(k - k_0)^2].$$

Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk ? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.

Ayuda: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi}$

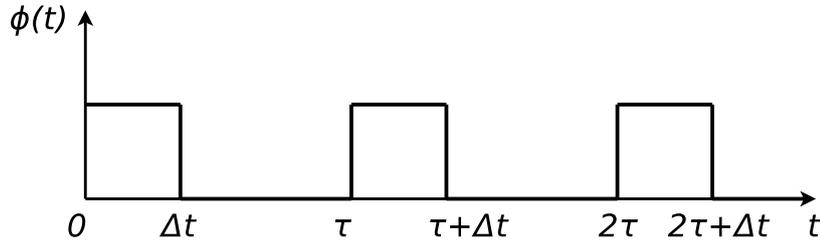
18. (*) Sea $\phi(t)$ una función real.

- a) Muestre que su transformada de Fourier $\Psi(\omega)$ cumple $\Psi(\omega) = \Psi^*(-\omega)$ ($\Psi(\omega) = |\Psi(-\omega)|$). Use esto para escribir a $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.
- b) Muestre que la transformada de Fourier \mathcal{F} es lineal, esto quiere decir que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

donde f y g son funciones de x y a y b son constantes.

- c) Tomemos una pulsación que se repite N veces:



Vea que la transformada de Fourier de un único pulso situado entre $(n\tau, n\tau + \Delta t)$ es igual a la transformada del pulso $(0, \Delta t)$ multiplicado por la fase $e^{in\phi}$. Calcule entonces la transformada de la pulsación cuadrada que se repite en un tiempo largo $T_{largo} = N\tau$.

- d) Muestre que para un valor finito de T_{largo} el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental $\nu_1 = 1/T_1$, siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$. Las armónicas más importantes caen entre 0 y $\Delta\nu = 1/\Delta t$.
- e) ¿Por qué vale $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ si, en principio, podría valer $\Delta t \Delta\nu \gg 1$? ¿La misma pregunta es aplicable a $\delta\nu$ y T_{largo} ?

Propagación en medios dispersivos

19. Se tiene un pulso de ancho Δk centrado en k_0 tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

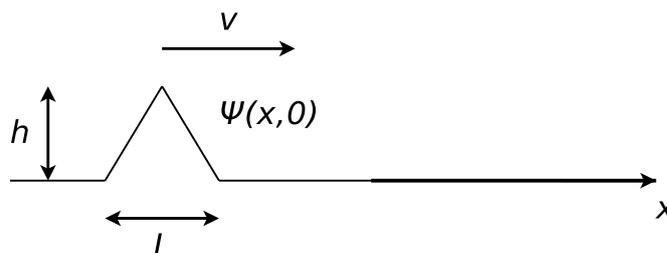
$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$

Si en $t = 0$ el pulso se propaga hacia $x < 0$, y se escribe:

$$\Psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2}\right] \exp(ikx) dk + c.c.$$

Calcule $\Psi(x, t)$. Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo.

20. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, ρ_1 y ρ_2 , unidas en un punto y sometidas a una tensión T . Sobre la primera se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura. Se conocen ρ_1 , ρ_2 , T , L y h . También se considera que los medios son no dispersivos.



- a) Hallar el desplazamiento $y(x, t)$.
- b) Explique cualitativamente como cambian estos resultados si el medio 2 es dispersivo.