Física 2 – verano 2020
Segundo Parcial – 13/03

Resolver los problemas y el ejercicio teórico en hojas separadas.

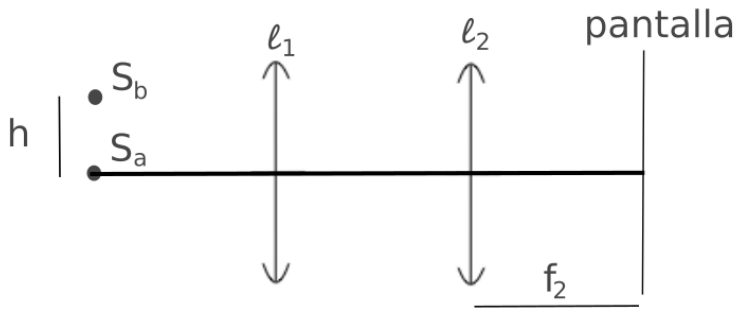
1. (4 *puntos*).
El sistema óptico de la figura está formado por dos lentes delgadas biconvexas l_1 y l_2 en vacío ($n = 1$). La lente l_2 es de distancia focal f_2. La lente l_1 tiene índice de refracción $n_1 = 1,5$ y la magnitud de sus radios de curvatura es R_1. La pantalla se ubica sobre el plano focal de l_2. Se utilizan dos fuentes puntuales monocromáticas de longitud de onda λ; la fuente S_a está sobre el eje óptico y la fuente S_b separada a una altura h.

   (a) Despreciando efectos de difracción el sistema produce imágenes nítidas de las fuentes sobre la pantalla; determine a qué distancia de las fuentes, sobre el eje óptico, se ubica la lente l_1.

   (b) Realice el trazado de rayos para cada fuente considerando que se forma imagen en la pantalla. Calcule la separación h' entre las imágenes de las fuentes y el ángulo θ' que subtienden desde el vértice de la lente l_2.

   (c) Por delante de la lente l_2 se ubica un diafragma con una abertura circular de diámetro D centrado en el eje óptico del sistema. Considere que el tamaño de la abertura no permite despreciar los efectos de difracción;
   (i) Encuentre la distribución de intensidades $I/I(0)$ producida por la fuente S_a sobre la pantalla. $I(0)$ es la intensidad en el centro.
   (ii) Teniendo en cuenta lo anterior describa el patrón de intensidades que produce la fuente S_b sobre la pantalla.

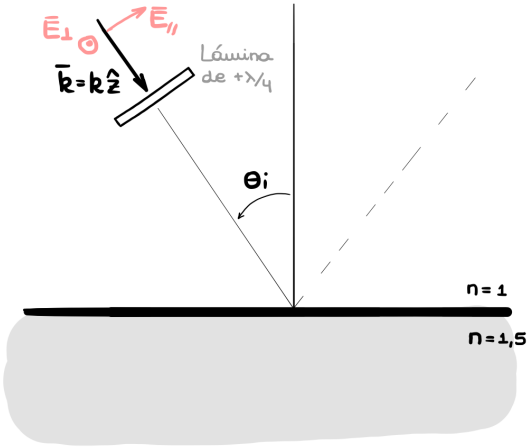
   (d) ¿Cuál es la separación mínima h_{min} para que el sistema resuelva los objetos a y b? Indique el criterio que utiliza. ¿Qué color del espectro visible usaría para optimizar la resolución?

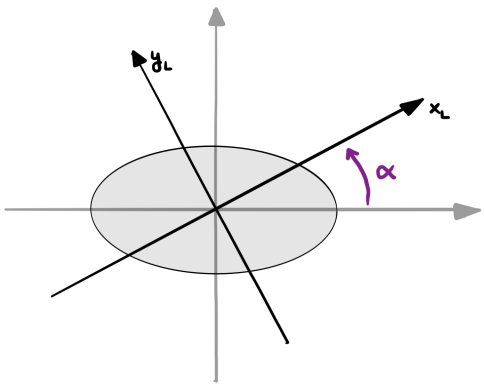


2. (3 *puntos*).

Un frente de ondas plano monocromático de frecuencia ω se propaga en la dirección $\hat{z}$ y está elípticamente polarizado en sentido antihorario con el eje mayor $\sqrt{3}$ veces el eje menor.

La onda atraviesa una lámina de cuarto de onda ($+\lambda/4$) y luego incide sobre una interfase plana entre aire ($n_{\text{aire}} = 1$) y vidrio ($n_{\text{vidrio}} = 1,5$), formando un ángulo θ_i con la dirección normal a la interfase, como se muestra en la figura. Se desea que no haya onda reflejada.





(a) ¿Cuál debe ser el estado de polarización a la salida de la lámina de cuarto de onda para que no haya onda reflejada en la interfase? Encuentre el ángulo θ_i con el cuál debe incidir la onda.

(b) Teniendo en cuenta (a), encuentre el ángulo α entre el eje rápido de la lámina (x_{L}) y el eje mayor de la elipse. Escriba el campo incidente sobre la lámina. Halle el campo a la salida de la lámina. *(Indique claramente el sistema de coordenadas que usa.)*

(c) Encuentre el ángulo φ que forma el eje rápido de la lámina con la dirección **perpendicular** al plano de incidencia.

(d) Si se reemplaza la fuente anterior por otra que emite luz monocromática de frecuencia $\omega' = 2\omega$, ¿servirá este arreglo de elementos para evitar la aparición de un haz reflejado? Justifique.

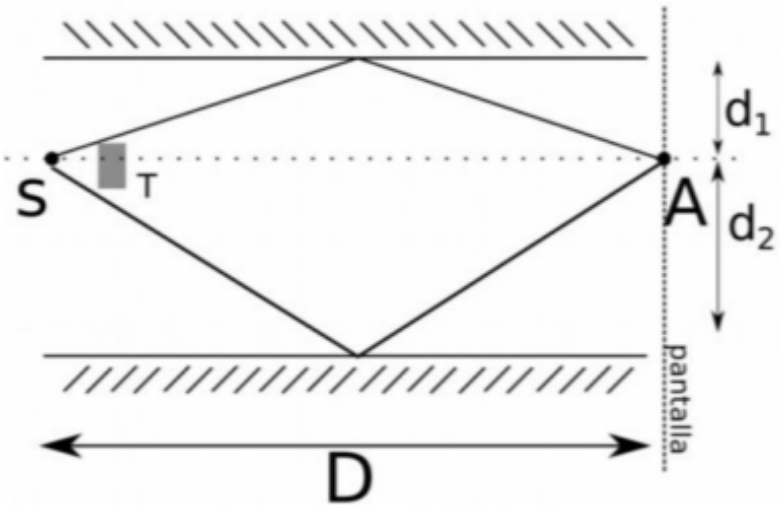
3. (3 *puntos*).

Se dispone de un dispositivo como el que se muestra a continuación. La fuente puntual S es monocromática ($\lambda_0 = 600$nm en el vacío) y está ubicada entre dos espejos. El dispositivo se encuentra sumergido en un medio con índice de refracción $n = 1,5$. Las longitudes involucradas son $D = 2$m, $d_1 = 2$mm y $d_2 = 4$mm. El tabique T impide que la luz llegue directamente de la fuente a la pantalla.

(a) Determinar si en el punto A se observa un máximo de intensidad, un mínimo o una intensidad intermedia. Justifique.

(b) Calcule la posición de las fuentes virtuales que generan el patrón de interferencia sobre la pantalla. Halle el valor de la interfranja y determine si el patrón se halla desplazado respecto de la posición del punto A.

(c) Se reemplaza la fuente S por otra de longitud de coherencia de $0,5$mm cuyo ancho de banda también está centrado en $\lambda = \lambda_0$. ¿Podrá observar el máximo de interferencia de orden 3? Justifique.



Fórmulas útiles:

- lentes delgadas en aproximación paraxial: $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n_l}{R_2} + \frac{n_l-n}{R_1} = \frac{n'}{f'} = \frac{n}{f} = \phi$
- Aumento lateral: $m = -\frac{ns'}{n's} = \frac{y'}{y}$
  Magnificación angular: $M = \frac{d_p}{s}$
  Magnificación para instrumento compuesto: $M_{compuesto} = m_{objetivo} \times M_{ocular}$.
- Snell: $n \sin\theta = n' \sin\theta'$
- en vacío: $I = c\,\epsilon_0 \langle |\vec{E}|^2 \rangle$
- Malus: $I = I_0 \cos^2\phi$
- espectro visible: $380nm$ a $780nm$.
- $E(X,Y;t) \propto \iint_{abertura} dE$

  $dE \simeq dxdy\ \frac{1}{R}\ e^{i\left(k\left(R - \frac{Xx+Yy}{R}\right) - \omega t\right)} = d\rho'\rho'\,d\varphi'\ \frac{1}{R}\ e^{i\left(k\left(R - \frac{\rho\rho'}{R}\cos(\varphi-\varphi')\right) - \omega t\right)}$

  $R = \sqrt{L^2 + X^2 + Y^2} = \sqrt{L^2 + \rho^2}$
- Algunas propiedades y definiciones:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,; \qquad \mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}\,; \qquad \int_0^b d\alpha\,\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi'\ e^{-i\alpha\cos(\varphi-\varphi')} = 2\pi\, b\, J_1(|b|)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1\,; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{J_1(x)}{x} = 1$$

$J_1(x_1) = J_1(x_2) = J_1(x_3) = 0$, para $x_1 = 3.83$, $x_2 = 7.01$,

P1)

a) S_2' : posición de imágenes que produce l_2 sobre pantalla

dato (enunciado): • $S_2' = f_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow S_2 = \infty$

(f_2: foco de l_2) ($S_2' = f_2$) (S_2: posición objeto de l_2)

Obs: la posición de S_2 está dada por S_1' (la imagen de l_1) $\Rightarrow \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_1'} = \frac{1}{f_1}$: de acá obtendré S_1 (posición de los fuentes)

aux:

$$1/f_1 = \frac{n - n_\ell}{-R_1} + \frac{n_\ell - n}{R_1} = 2\,\frac{n_\ell - n}{R_1} = \frac{2}{R_1}\cdot(1{,}5 - 1) = \frac{1}{R_1}$$

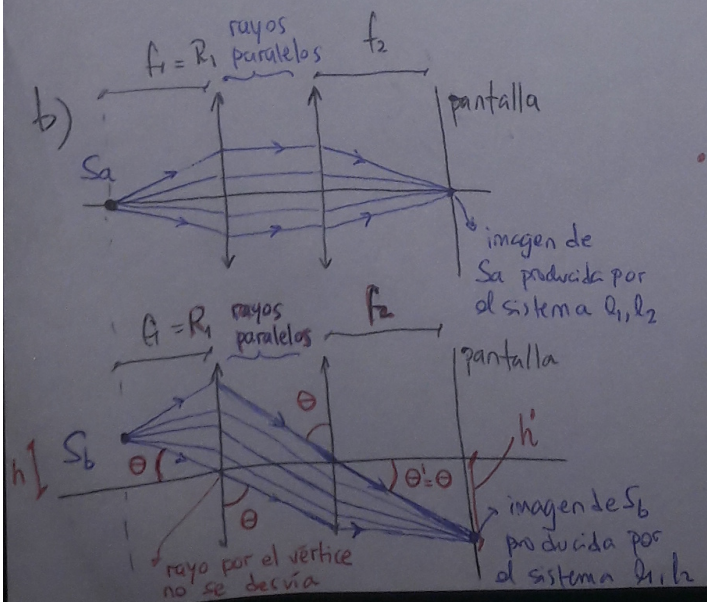
$\Rightarrow$ • $f_1 = R_1 > 0$

• usando $S_1' = \infty$ (imagen en infinito producida por l_1):

$$\frac{1}{S_1} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{R_1} \Rightarrow \boxed{S_1 = R_1}$$

: la lente l_1 debe estar a dist. R_1 de los fuentes para producir el enfoque en la pantalla del sistema

b)



• $\tan\theta = \frac{h}{R_1}$ ($S_b = R_1$)

• los rayos por el vértice de no se desvían (lentes delgadas, aprox paraxial, $n' = n = 1$)

• los rayos entre l_1 y l_2 son paralelos.

• $\underbrace{\tan\theta'}_{\equiv \tan\theta} = h'/S_2' = h'/f_2 \Rightarrow h'/f_2 = h/R_1$

$\therefore$ $\boxed{h' = f_2 \cdot h / R_1}$ (es invertida, calculé el módulo)

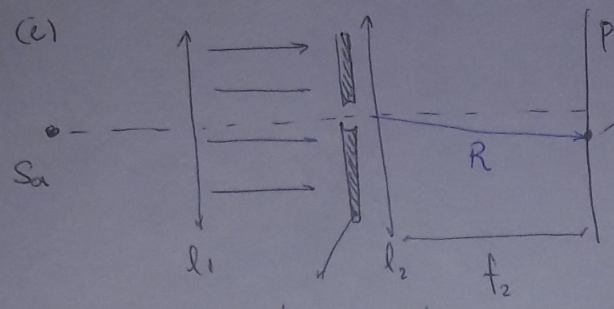
$\theta' \ll 1$

$$\tan\theta' = h'/f_2 = h/R_1 \Rightarrow \boxed{\theta' \cong h/R_1}$$

Obs: pueden usar el aumento lateral para obtener h'.

(c)

(i)

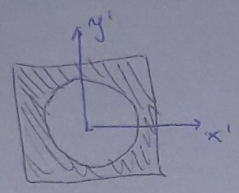


campo sobre la pantalla:

$$E_{pantalla} \propto \iint_{abertura} dE \,,$$

(uso coord. cilíndricas)

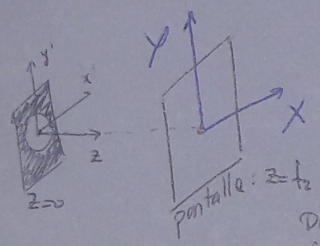
diafragma (abertura):



$x' = \rho' \cos\varphi'$

$y' = \rho' \sin\varphi'$

pantalla:



$X = \rho \cos\varphi$

$Y = \rho \sin\varphi$

$\Rightarrow$ • $dE = d\rho' \cdot \rho' \cdot d\varphi' \, \frac{1}{R} e^{i\left(k\left(R - \frac{\rho\rho'}{R}\cos(\varphi-\varphi')\right) - \omega t\right)}$

• abertura circular de radio $\frac{D}{2}$

• $R = \sqrt{f_2^2 + \rho^2}$: dist. abertura/pantalla

$\simeq f_2$ a orden cero (para la amplitud)

$$\Rightarrow E_{pantalla} \propto \frac{1}{f_2} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \underbrace{\int_0^{D/2} d\rho' \rho' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, e^{-ik\frac{\rho\rho'}{R}\cos(\varphi-\varphi')}}_{\text{integral}} = \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\pi D^2}{2} \cdot \left[\frac{J_1\left(\frac{k\rho D}{2R}\right)}{k\rho D/(2R)}\right]$$

$e^{i(kR-\omega t)}$

(aux)

aux: integral $= \left(\frac{R}{k\rho}\right)^2 \int_0^b d\alpha \, \alpha \int_0^{2\pi} d\varphi' \, e^{-i\alpha\cos(\varphi-\varphi')} = \left(\frac{R}{k\rho}\right)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{k\rho}{R} \frac{D}{2} J_1\left(\frac{k\rho D}{2R}\right)$

cambio: $\alpha = \frac{k\rho}{R}\rho'$; $d\alpha = \frac{k\rho}{R} d\rho'$; $b = \frac{k\rho}{R}\left(\frac{D}{2}\right)$

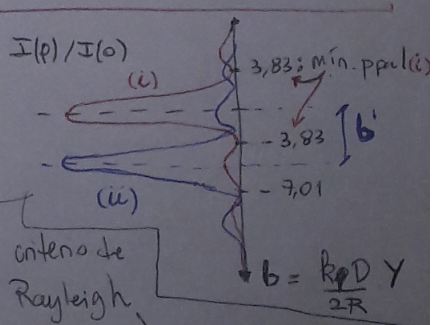
$$I(\rho) = cte \cdot \left(\frac{J_1(b)}{b}\right)^2 \underbrace{\langle \cos(kR-\omega t)\rangle}_{1/2} \Rightarrow \boxed{\frac{I(\rho)}{I(0)} = \left[\frac{J_1(k\rho D/2R)}{k\rho D/(2R)}\right]^2}$$

$$\left(I(0) = cte \cdot \left(\frac{J_1(0)}{0}\right)^2 \cdot 1/2\right)$$

$\to 1$ (ver fórmulas)

(ii) idem (i) pero centrado en: $(X_{S_b}; Y_{S_b}) = (0, h')$ $\Rightarrow$

(mismo patrón) $\quad (b' = kh'D/(2R))$



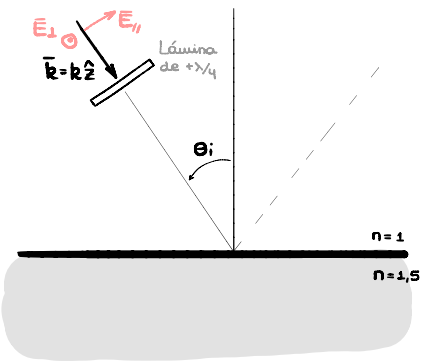
(d) quiero h_{min} / $h' \geq h'_{min}$ = $\rho_{mínimo\ ppal.\ difracción}$ = $\underbrace{b_{mín.\ ppal.}}_{=3,83} \frac{2R}{kD}$: criterio de Rayleigh

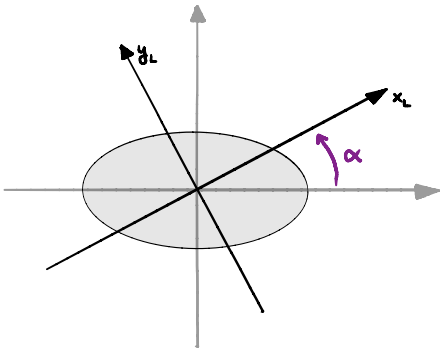
$\to$ el lóbulo ppal. de S_b en la posición del mín. de S_a

$$\Rightarrow h'_{min} = \frac{3,83}{\pi} \lambda \frac{R}{D} \simeq 1,22 \cdot \frac{\lambda f_2}{D} \Rightarrow \boxed{h_{min} \frac{f_2}{R_1} = 1,22 \frac{\lambda}{D} f_2 R_1}$$

uso (b)

• $\lambda = 380nm$ (violeta) optimiza resolución (resuelve objetos mas pequeños)



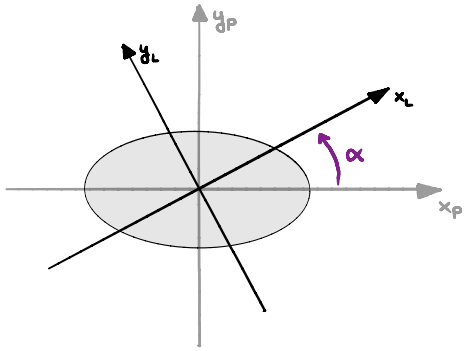


a) Cuando una onda incide sobre una interfaz con θ_i igual al ángulo de Brewster (o de polarización) el campo $\bar{E}_{//}$ en la dirección contenida en el plano de incidencia se transmite completamente, es decir, no hay onda en la dirección paralela reflejada $\Rightarrow$ para que no haya onda reflejada por completo, la onda después de la lámina debe estar en la dirección // al plano de incidencia

$\bar{E}'(z,t) = \bar{E}_{//}(z,t) = E'(z,t)\,\hat{//}$ $\Rightarrow$ ESTO ES UNA POLARIZACIÓN LINEAL

Para que no haya onda reflejada, $\theta = \theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{n_{vidrio}}{n_{aire}}\right) = \tan^{-1}(1{,}5)$

b)



$\hat{x}_L = \cos(\alpha)\,\hat{x}_P + \sin\alpha\,\hat{y}_P$; $\hat{x}_P = \cos\alpha\,\hat{x}_L - \sin\alpha\,\hat{y}_L$

$\hat{y}_L = -\sin(\alpha)\,\hat{x}_P + \cos\alpha\,\hat{y}_P$; $\hat{y}_P = \sin\alpha\,\hat{x}_L + \cos\alpha\,\hat{y}_L$

$\bar{E}_0(z,t) = E_{0x}\cos(kz-\omega t)\,\hat{x}_P + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\,\hat{y}_P$; $E_{0x} = 3E_{0y}$

En los ejes de la lámina

$$\vec{E}_0(z,t) = E_{0x}\cos(kz-\omega t)(\cos\alpha\,\hat{x}_L - \sin\alpha\,\hat{y}_L) + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi/2)(\sin\alpha\,\hat{x}_L + \cos\alpha\,\hat{y}_L)$$
$$= \left(E_{0x}\cos(kz-\omega t)\cos\alpha + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\sin(\alpha)\right)\hat{x}_L +$$
$$+\left(-E_{0x}\cos(kz-\omega t)\sin\alpha + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\cos(\alpha)\right)\hat{y}_L$$

$\Rightarrow$ Luego de atravesar la lámina

$$\bar{E}'(z,t) = \left(E_{0x}\cos(kz-\omega t)\cos\alpha + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\sin(\alpha)\right)\hat{x}_L + \left(-E_{0x}\cos(kz-\omega t+\pi/2)\sin\alpha + E_{0y}\cos(kz-\omega t+\pi)\cos(\alpha)\right)\hat{y}_L$$

$\cos(kz-\omega t+\pi/2) = \cos(kz-\omega t)\cos(\pi/2) - \sin(kz-\omega t)\sin(\pi/2) = -\sin(kz-\omega t)$

$\cos(kz-\omega t-\pi/2) = \cos(kz-\omega t)\cos(\pi/2) + \sin(kz-\omega t)\sin(\pi/2) = \sin(kz-\omega t)$

$$\bar{E}'(z,t) = \left(E_{0x}\cos(kz-\omega t)\cos\alpha - E_{0y}\sin(kz-\omega t)\sin\alpha\right)\hat{x}_L + \left(-E_{0x}\sin(kz-\omega t)\sin\alpha - E_{0y}\cos(kz-\omega t)\cos\alpha\right)\hat{y}_L$$

$\Rightarrow$ Como quiero una onda linealmente polarizada α tiene que ser tal que sólo tenga términos con $\sin(kz-\omega t)$ o con $\cos(kz-\omega t)$ y me queda

$$\bar{E}'(z,t) = (E'_x\,\hat{x}_L - E'_y\,\hat{y}_L)\cos(kz-\omega t)$$

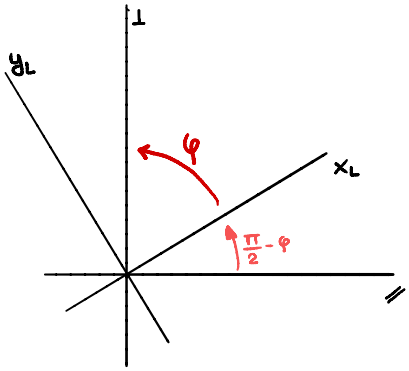
$\alpha = 0$ satisface ($\alpha = \pi/2$ también)

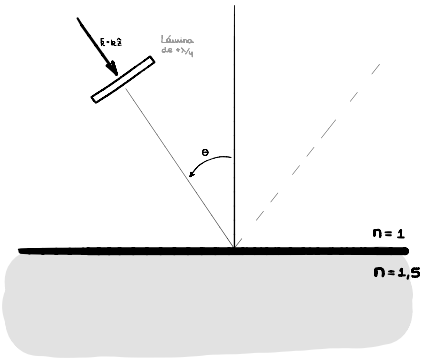
$\Rightarrow$ $\bar{E}'(z,t) = (E_{0x}\,\hat{x}_L - E_{0y}\,\hat{y}_L)\cos(kz-\omega t)$

c) Quiero encontrar la orientación de los ejes de la lámina con respecto al plano de incidencia

Sé que el campo tras pasar la lámina debe hallarse en dirección paralela a dicho plano

$$\Rightarrow \hat{\parallel} = E_{0x}\,\hat{x}_L - E_{0y}\,\hat{y}_L$$



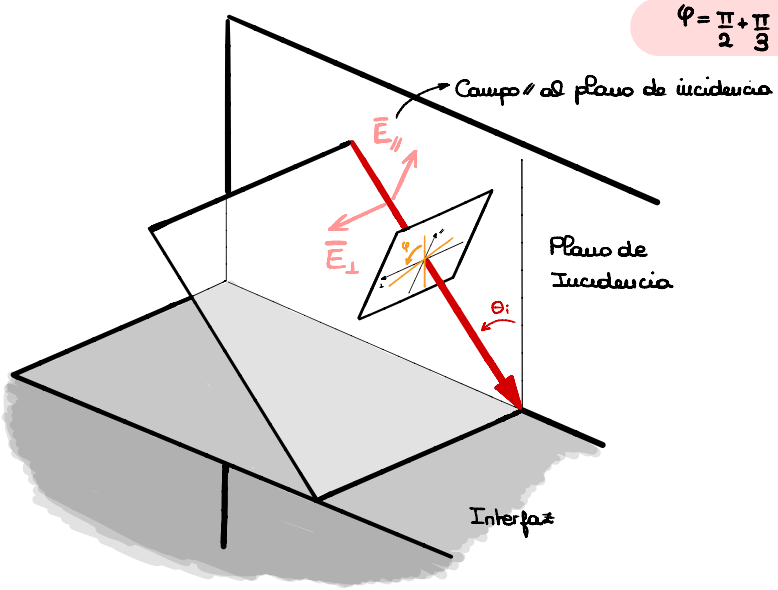


$$\hat{x}_L = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{\parallel} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{\perp}$$

$$\hat{y}_L = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{\parallel} + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{\perp}$$

$$\hat{\parallel} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{x}_L + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\hat{y}_L \Rightarrow \begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = E_{0x} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = E_{0y}\end{array} \Rightarrow \frac{\pi}{2}-\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}E_{0y}}{E_{0y}}\right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

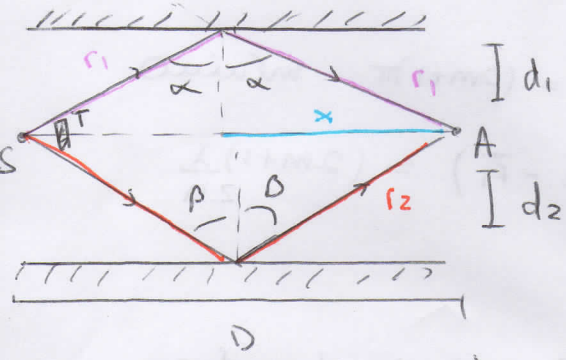
$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$$



d) Si la fuente tiene $\omega' = 2\omega$ $\Rightarrow$ La lámina funciona para el campo incidente como una lámina de $\lambda/2$, que invierte el sentido de rotación pero no permite obtener polarización lineal para ninguna orientación de la lámina. Entonces, no importa cómo disponga los elementos, siempre hay un haz reflejado.

EJERCICIO CLASE VIERNES. Interferencia

Se dispone de un dispositivo como el que se muestra en la figura. La fuente S es una fuente puntual perfectamente monocromática ($\lambda_0 = 600$ nm en el vacío) que se encuentra entre dos espejos. Sumergido en un medio con índice $n = 1{,}5$. Las longitudes involucradas son $D = 2$ m ; $d_1 = 2$ mm y $d_2 = 4$ m. El tabique T impide que la luz llegue directamente de la fuente a la pantalla.

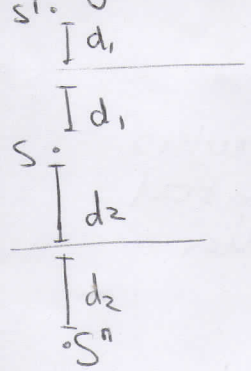


- Espejo: ángulo reflejado es igual al incidente

$\Rightarrow D = 2x \qquad x = D/2$

$\tan\alpha = \dfrac{D}{2d_1}$; $\tan\beta = \dfrac{D}{2d_2}$

Puedo pensar que tengo dos fuentes secundarias dadas por las imágenes de S en los dos espejos.



- a) Determinar si en A hay un mínimo, máximo o intensidad intermedia.

Tengo que calcular la diferencia de fase entre los dos rayos

$\delta = (\bar{k}_2\bar{r}_2 - \bar{k}_1\bar{r}_1) + \delta_2 - \delta_1$

Como provienen de la misma fuente son coherentes. Veo si se desfasan

Como tengo espejos: reflexiones: Tengo un salto en π cuando me refleja con un espejo. (es el análogo a la cuerda y pared)

Como los dos están reflejados una vez → tengo un desfasaje total de 2π (puedo tomarlo como 0).

Faltaría ver la diferencia de camino óptico

$\Delta = k_0 \cdot n \, (\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$

Tengo que calcular $\bar{r}_2$ y $\bar{r}_1$

Usando que $h_1 = \dfrac{d_1}{\cos\alpha}$ $\quad \tan\alpha = \dfrac{D}{2d_1}$ $\quad \alpha = \arctan\left(\dfrac{D}{2d_1}\right)$

$h_2 = \dfrac{d_2}{\cos\beta}$ $\quad \tan\beta = \dfrac{D}{2d_2}$ $\quad \beta = \arctan\left(\dfrac{D}{2d_2}\right)$

$$r_1 = 2\left(\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + d_1^2}\right)$$

$$r_2 = 2\left(\sqrt{\left(D/2\right)^2 + d_2^2}\right)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \left(2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + d_2^2} - 2\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + d_1^2}\right)$$

Para que sea máximo $\delta = 2m\pi$ | $\delta = (2m+1)\pi$ mínimo

$\delta = \dfrac{\cancel{2\pi} n}{\lambda}\left(\quad\right) = \cancel{2}m\cancel{\pi}$ | $(r_2 - r_1) = (2m+1)\dfrac{\lambda}{2n}$

$(r_2 - r_1) = \dfrac{m\lambda}{n}$ (max)

Si no es ninguno de estos casos es una intensidad intermedia

- $1\,nm = 1 \times 10^{-6}\,mm$ $\quad (= 10^{-9}\,m)$

$$\frac{3\left(\sqrt{(1m)^2 + (4mm)^2} - \sqrt{(1m)^2 + (2mm)^2}\right)}{\lambda = 600\,nm} = 29{,}9998305$$

↳ no es entero

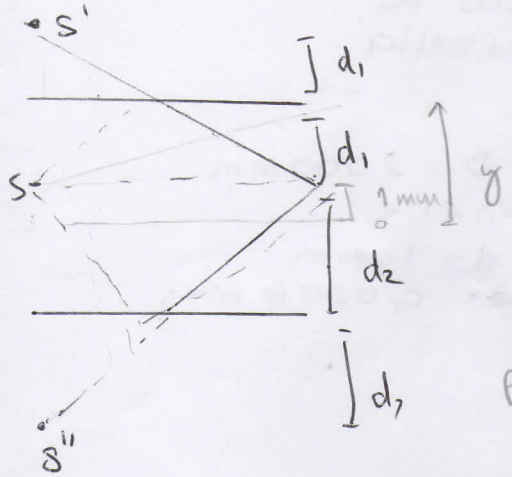
Es una intensidad media

~ 30

↳ $30 = m$ entero.

Es cercano a un máximo de intensidad

b) Posición de las fuentes virtuales que generan el patrón de interferencia. Calcule la interfranja y determine si el patrón se halla desplazado.

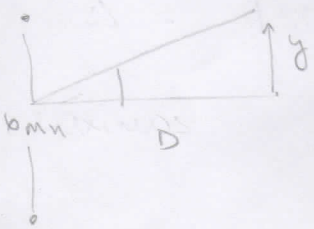


Distancia entre las fuentes secundarias

$$d = 2d_1 + 2d_2 = 2 \cdot 2\,mm + 2 \cdot 4\,mm$$
$$= (4+8)\,mm = 12\,mm = 0{,}012\,m$$

$D = 2m$

Hay dos sistemas de diferencia
Puedo usar las aproximaciones de Young



$\operatorname{sen}\theta \approx \frac{y}{D}$
desde el centro

$$\delta = k_0 n d \operatorname{sen}\theta$$

MÁXIMOS: $\delta = 2m\pi$

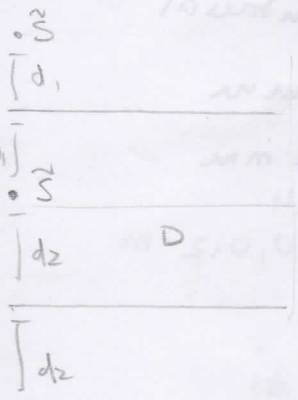
$$\frac{2\pi}{\lambda} n d \operatorname{sen}\theta = 2m\pi$$
$$n d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$$

Si $\theta \ll 1$ $\operatorname{sen}\theta \approx \frac{y}{D}$ $\quad \frac{y}{D} n d = m\lambda \quad y_m = \frac{m\lambda D}{nd}$

Interfranja $y_{m+1} - y_m = \boxed{\frac{\lambda D}{nd} = i}$

El orden 0 en $y = 0$, con y medido desde la posición que equidista los dos fuentes virtuales (en 1 mm por debajo de S) → está desplazado hacia abajo.

c) Se reemplaza la fuente S por otra de longitud de coherencia 0,5 mm cuyo ancho de banda también está centrado en $\lambda = 600$ nm ¿Podrá observar el máximo de interferencia de orden 3?



$d = 2d_1 + 2d_2$ D: distancia a la pantalla.

Usando lo anterior

$$y_m = \frac{m\lambda D}{n \cdot d}.$$

$D = 2000$ mm
$n = 1,5$
$d = 12$ mm
$\lambda = 0,0006$ mm

$$m = 3 \quad y_3 = \frac{3 \cdot \lambda D}{nd}.$$

$$y_3 = 0,2 \text{ mm}$$

$$n d \underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{\frac{y}{D}} = 1,5 \cdot 12 \text{ mm} \cdot \frac{0,2 \text{ mm}}{2000 \text{ mm}} = 0,0018 \text{ mm}.$$

Como $\Delta < L$ podría observarlo

Tengo que ver que la diferencia de camino sea menor a la longitud de coherencia, si es mayor no podrá ver ese orden ya que no son coherentes (int. con otro haz)

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n d \operatorname{sen}\theta = 6\pi$$

$$n d \operatorname{sen}\theta_3 = 3\lambda. = 0,0018 \text{ mm} < 0,5 \text{ mm} \checkmark$$

Lo puedo ver