Problema 1

Considere el sistema de partículas de la Figura 1, todas de masa **m**. Las partículas se hayan acopladas mediante resortes de constantes **k** para los resortes verticales y **k'** para el resorte horizontal. Todo los resortes tienen longitud natural l_0.

a) Para el movimiento más general del sistema en el plano del dibujo, ¿cuántos grados de libertad tiene el sistema?.¿Y si el movimiento es sólo longitudinal?

b) Considere al sistema sólo en el caso de movimiento longitudinal.

   I) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos de oscilación. Dibuje la configuración de los modos.

   II) Escriba la solución más general para cada masa.

c) Con la solución hallada en el item anterior,

   I) Escriba la solución del sistema si se las pone a oscilar dando a la partícula **a** una amplitud A_0 y dejando a la partícula **b** quieta. Considere que ambas parten del reposo.

   II) ¿Es posible encontrar batidos en este sistema? De ser así, ¿cuál es la condición para que existan? Realice un gráfico cualitativo del movimiento de cada masa en ese caso, y explique lo más completo y claramente posible el gráfico realizado.

d) Considere que se fuerza al sistema aplicando a la masa de la derecha una fuerza cuyo módulo está dado por $F = F_0 cos(\Omega t)$. Encuentre la solución del régimen estacionario, considerando que hay disipación, con coeficiente γ. ¿Cómo cambia la respuesta del sistema al cambiar la frecuencia del forzado? Si ahora quiere excitar sólo el modo de frecuencia más alta, ¿cómo forzaría al sistema?

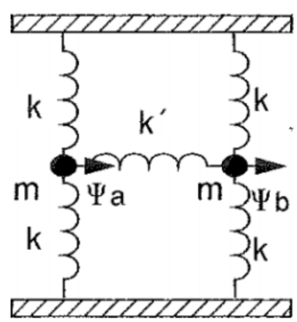

Figura 1: Esquema del sistema

Problema 2

Se tiene un tubo de diámetro D cerrado en su base y abierto en su parte superior. A lo largo del diámetro, en el extremo abierto, se sujeta una cuerda de densidad lineal μ somentiendola a una tensión T_0, como se muestra en la figura 2a).

a) Escriba la expresión más general de una perturbación en la cuerda. Identifique cuáles son las frecuencias y números de onda permitidos y esquematice los primeros 4 modos normales.

b) Si el segundo armónico de la cuerda excita la columna del aire dentro del tubo en su modo fundamental, hallar la altura h del tubo.

c) En un instante $t = 0$ se deforma la cuerda como se muestra en la figura 2b). Analice por argumentos de simetría cómo será la perturbación $\psi(x, t)$.

d) Halle $\psi(x, t)$ teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

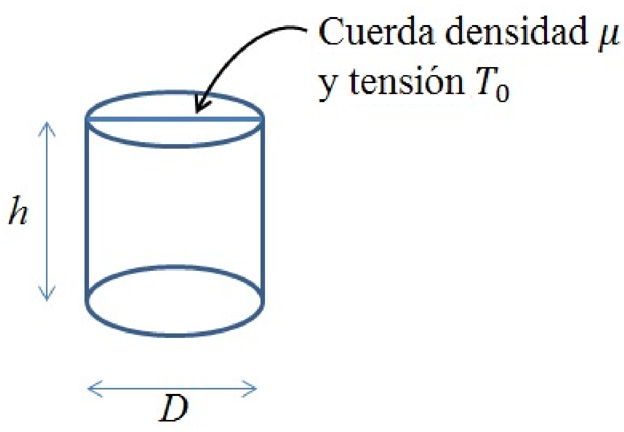

Figura 2a)

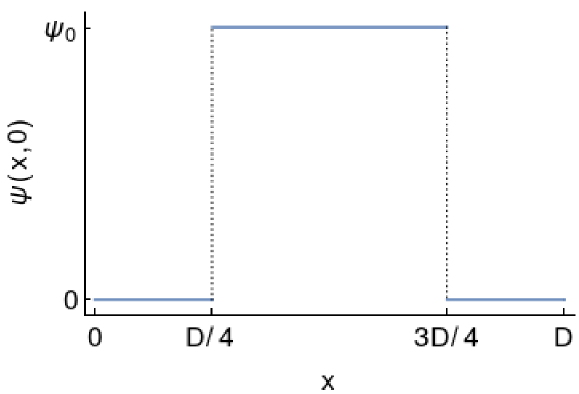

Figura 2b)

Integrales e identidades que pueden resultarle de utilidad

$\int_0^D \operatorname{sen}(\frac{q\pi x}{D}) \operatorname{sen}(\frac{n\pi x}{D}) dx = \frac{D}{2}\delta_{qn}$

$\int_0^D \cos(\frac{q\pi x}{D}) \cos(\frac{n\pi x}{D}) dx = \frac{D}{2}\delta_{qn}$

Problema 3

Considere un oscilador amortiguado de frecuencia ω_0^2 y amortiguamiento (por unidad de masa) Γ. El oscilador se encuentra en reposo. En el instante $t = 0$ se le aplica una fuerza constante f_0 durante un lapso muy breve de tiempo τ y se lo deja evolucionar. La ecuación de movimiento del oscilador es

$$\ddot{\psi} + \Gamma\dot{\psi} + \omega_0^2\psi = f_0[\Theta(t) - \Theta(t-\tau)]$$

donde Θ es la función de Heaviside (función escalón).

a) Aplique una transformada de Fourier sobre la ecuación de movimiento y obtenga la transformación $\mathcal{F}[\psi(t)]$. ¿Cómo interpreta las frecuencias negativas?

b) Grafique cualitativamente el módulo $|\mathcal{F}(\omega)|^2$ para $\omega > 0$ (puede considerar sólo las contribuciones relevantes de $\mathcal{F}[\psi]$ a lo largo de este intervalo). Obtenga la frecuencia para la cual esta magnitud es máxima. Interprete físicamente el espectro.

c) Determine el intervalo de frecuencias $\Delta\omega$ que encierra valores del espectro mayores a la mitad del máximo (ancho de banda). Puede suponer $\omega_0\tau \ll 1$.