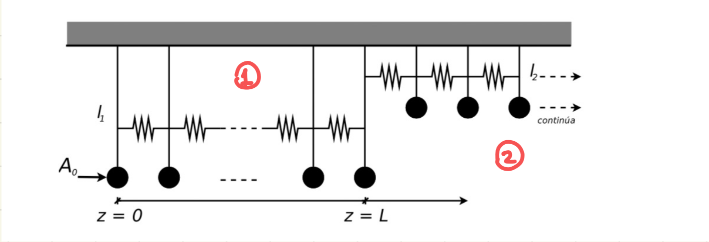
# Filtros pasabanda

# Regímenes de propagación dispersivo y reactivo.

9. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en $\omega_0^2$ en $z = L$, según se esquematiza en la figura. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. → Estudio el rango dispersivo entre $0<z<L$.




Ya discutimos el problema de N péndulos acoplados

$$\ddot{\psi}_n = -\frac{g}{l}\psi_n - \frac{k}{m}(\psi_n - \psi_{n+1}) + \frac{k}{m}(\psi_{n-1} - \psi_n).$$

Proponemos solución para un modo, $\psi_n(t) = A\cos(kna + \alpha)\cos(\omega t + \theta)$

Reemplazamos en la ecuación para obtener la relación de dispersión

$$\ddot{\psi}_n = -A\omega^2\cos(kna + \alpha)\cos(\omega t + \theta)$$

$$\psi_{n+1} = A\cos[k(n+1)a + \alpha]\cos(\omega t + \theta)$$

$$\psi_{n-1} = A\cos[k(n-1)a + \alpha]\cos(\omega t + \theta)$$

$$\Rightarrow -\cancel{A}\omega^2\cos(kna+\alpha)\cancel{\cos(\omega t+\theta)} = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\cancel{A}\cos(kna+\alpha)\cancel{\cos(\omega t+\theta)} +$$

$$+ \frac{k}{m}\cancel{A\cos(\omega t+\theta)}\left(\cos[(n+1)ka+\alpha] + \cos[(n-1)ka+\alpha]\right)$$

$$-\omega^2\cos(kna+\alpha) = -\left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)\cos(kna+\alpha) + \frac{k}{m}\left(\cos[k(n+1)a+\alpha] + \cos[k(n-1)a+\alpha]\right)$$

Usamos el coseno de la suma:

$* \cos[k(n\pm1)a+\alpha] = \cos[kna+\alpha \pm ka]$

$= \cos(kna+\alpha)\cos(ka) \mp \sin(kna+\alpha)\sin(ka)$

$$-\omega^2\cos(kna+\alpha) = -\left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right)\cos(kna+\alpha) + \frac{k}{m}\Big(\cos(kna+\alpha)\cos(ka) - \cancel{\sin(kna+\alpha)\sin(ka)} + \cos(kna+\alpha)\cos(ka) + \cancel{\sin(kna+\alpha)\sin(ka)}\Big).$$

$$-\omega^2\cancel{\cos(kna+\alpha)} = -\left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right)\cancel{\cos(kna+\alpha)} + \frac{k}{m}\cancel{\cos(kna+\alpha)}\cos(ka).$$

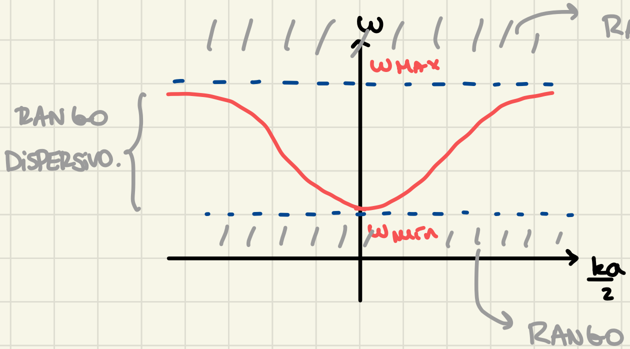
$$-\omega^2 = -\left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right) + \frac{2k}{m}\cos(ka)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}\left(2-2\cos(ka)\right) + \frac{g}{l}$$

en el continuo: $\omega^2 = \frac{T_0}{\mu}k^2 + \frac{g}{l}$ (graficar)

- $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{4k}{m}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) + \frac{g}{l}}$$ RELACIÓN DE DISPERSIÓN.




$\omega_{min} = \frac{g}{l}$

$\omega_{máx} = \frac{4k}{m} + \frac{g}{l}$

¿Qué pasa en el rango reactivo?

Si fuerzo al sistema con una frecuencia del rango reactivo, la amplitud de salida (la de la masita más lejana al forzante) será mucho menor que la de la entrada (la del forzante). Es decir, la amplitud decaerá mientras más lejos esté del forzante.

Esto se debe a que en este rango, la respuesta del sistema ante el forzante es con un k complejo.

$$\cos(kna+\alpha) = \frac{e^{ikna}+e^{-ikna}}{2}$$

Si $k \in \mathbb{C} \Rightarrow k = i\tilde{k}$

$$\cos(kna+\alpha) \simeq \tilde{A}e^{\tilde{k}\cdot na} + \tilde{B}e^{-\tilde{k}na}$$

$$\Rightarrow \psi_n^{(P)}(t) = \left(\tilde{A}_p e^{\tilde{k}_p na} + \tilde{B}_p e^{-\tilde{k}_p na}\right)\cos(\omega_p t+\theta_p)$$

A estos sistemas se los llama filtro pasabandas, porque funcionan de manera oscilante para $\omega_{min} < \Omega < \omega_{max}$.

Volvamos al probelma 9. Lo resolveremos en la aproximación continua.

En cada región (1 y 2) tendremos una ecuación de la forma

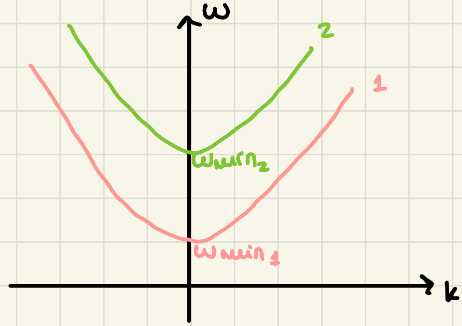
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{g}{\ell}\psi$$

Con relación de dispersión

$$\omega_i^2 = \frac{T_0}{\mu}k^2 + \frac{g}{\ell_i}$$

$\omega_{min_1} = \frac{g}{l_1}$

$\omega_{min_2} = \frac{g}{l_2}$




$l_2 < l_1 \Rightarrow \omega_{min_2} > \omega_{min_1}$.

Para que el sistema se comporte como dispersivo entre 0 y L, necesito que $\Omega > \omega_{min_1}$ y $\Omega < \omega_{min_2}$ (para que no afecte la parte con $l_2$).

$\Rightarrow$ Pido que $\omega_{min_1} < \Omega < \omega_{min_2}$.

En este caso,

$$\psi(x,t) = \begin{cases} A\cos(kx+\alpha)\cos(\omega t+\theta_1) & z \leq L \\ (\tilde{A}e^{\tilde{k}z} + \tilde{B}e^{-\tilde{k}z})\cos(\omega t+\theta_2) & z > L \end{cases}$$

Condiciones de contorno:

1) A la "masita 1" ($x=0$) la mueve el forzante

$$\psi(0,t) = \underbrace{A_0\cos(\Omega t)}_{F(t)} = A\cos\alpha\cos(\omega t+\theta_1)$$

$\Rightarrow A_0 = A\cos\alpha \; ; \; \omega = \Omega, \; \theta_1 = 0$

Viendo la relación de dispersión, también podemos definir $k$.

$$\tilde{k}^2 = \frac{\mu}{T_0}\left(\Omega^2 - \frac{g}{l_1}\right). \quad \text{en} \quad z \leq L$$

$$\tilde{k}^2 = \frac{\mu}{T_0}\left(\frac{g}{l_2} - \Omega^2\right) \quad \text{en} \quad z > L$$

Por ahora tenemos:

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \frac{A_0}{\cos\alpha}\cos(kx+\alpha)\cos(\Omega t) & z \leq L \\ (\tilde{A}e^{\tilde{k}x} + \tilde{B}e^{-\tilde{k}x})\cos(\Omega t) & z > L \end{cases}$$

Otro contorno necesario es pedir que en el infinito la solución converja (o sea que sólo tenga la exponencial negativa)

$\Rightarrow \tilde{A} = 0$ necesariamente

Falta imponer el empalme. $\Rightarrow \psi_1(L,t) = \psi_2(L,t) \rightarrow$ continuidad en la posición

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial\psi_2}{\partial x}(L,t) \rightarrow \text{fuerza continua}$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{\cos\alpha}\cos(kL+\alpha) = \tilde{B}e^{-\tilde{k}L}$$

$$\cancel{-}\frac{A_0}{\cos\alpha}k\sin(k\cdot L+\alpha) = \cancel{-}\tilde{B}\tilde{k}e^{-\tilde{k}L}$$

Elevo al cuadrado y sumo:

$$\frac{A_0^2}{\cos^2\alpha}\cos^2(kL+\alpha) + \frac{A_0^2}{\cos^2\alpha}\sin(kL+\alpha) = \tilde{B}^2 e^{-2\tilde{k}L}\left(1+\frac{\tilde{k}^2}{k^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{A_0^2}{\cos^2\alpha} = \tilde{B}^2 e^{-2\tilde{k}L}\left(1+\frac{\tilde{k}^2}{k^2}\right)$$

$$\boxed{\tilde{B} = \frac{A_0}{\cos\alpha}\,\frac{e^{\tilde{k}\cdot L}}{\sqrt{1+\frac{\tilde{k}^2}{k^2}}}}$$

Falta hallar $\alpha$:

$$\frac{1}{k}\,\mathrm{tg}(kL+\alpha) = \frac{1}{\tilde{k}} \Rightarrow \mathrm{tg}(k\cdot L+\alpha) = \frac{k}{\tilde{k}}$$

$$\boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right) - kL}$$