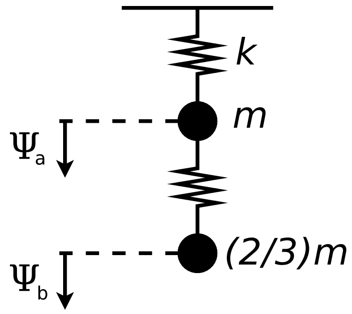
Física 2 (Físicos) - Cátedra Prof. Joaquín Sacanell

Verano 2022

Guía 2: Oscilaciones Libres y Forzadas

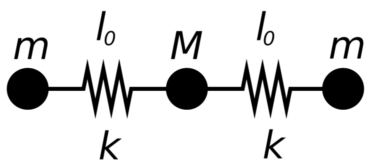
Sistemas de 2 o más grados de libertad - Modos Normales

1. Sea el sistema de la figura, en el cual ambos resortes tienen constante elástica k y longitud natural l_0. Considere ausencia de gravedad



   a) Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
   b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula. (Las condiciones iniciales tienen unidades arbitrarias de distancia y velocidad)
   c) Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.
   d) * *Una vez que haya resuelto el problema completo en su hoja, anímese a realizar un notebook en google Colab - Python que le permita calcular los modos normales de oscilación (para esto proporcione al código valores para los parámetros de construcción del sistema m, k, l_0, etc). Utilice las condiciones iniciales de b) para observar en una animación el movimiento de las partículas del sistema. Estudie como variando esas condiciones iniciales puede excitar el primer o el segundo modo.*

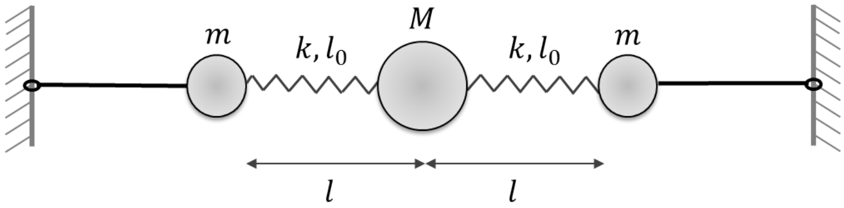
2. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_o. Analizar solamente los modos longitudinales.



   a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa. Se recomienda plantee el problema (y todos los demás de aquí en más) a partir de las posiciones de equilibro de cada partícula .
   b) Halle las frecuencias de los modos normales.
   c) Dibuje las configuraciones de cada modo (es decir esquematice cómo es la posición de las masas para algún instante de tiempo). *Grafique el movimiento de cada masa en cada uno de los modos vibracionales mediante un código en Colab/Python.*
   d) Si el centro de masa de la molécula se mueve con $v_o = cte$, halle la solución para $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$ y $\psi_c(t)$.
   e) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

f) Si se aplica a una de las masas una fuerza armónica, ¿a cuál conviene aplicarla para excitar más eficientemente el modo de mayor frecuencia?

3. Considere las oscilaciones transversales del problema anterior. Para su mejor comprensión puede imaginarlo como el esquema de la figura, en el cual las masas de los extremos pueden subir/bajar pero solidarios a la barra enhebrada a los vástagos laterales.



a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas. ¿Qué diferencias hay entre la ecuación de movimiento para resortes slinky y resortes con $l_0 \neq 0$ en la aprox. de pequeñas oscilaciones? Nota: utilice lo aprendido en la guía de repaso.

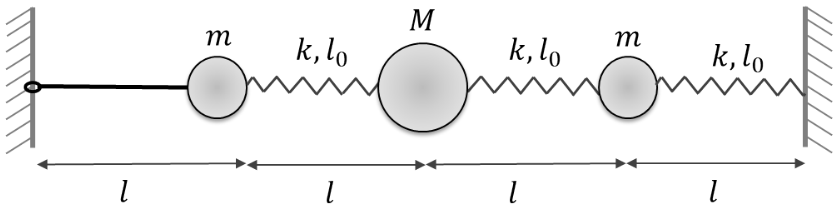
b) Halle las frecuencias de los modos normales.

c) Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal. Determine los desplazamientos de cada masa como función del tiempo (solución más general posible para cada masa).

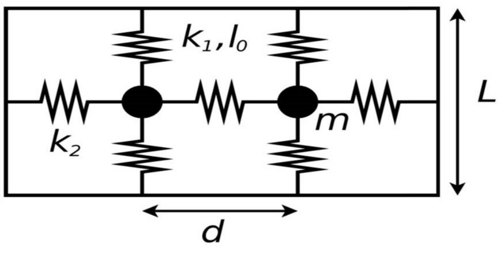
d) ¿Qué condiciones iniciales permiten excitar sólo el segundo modo?

e) Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿qué modos se observan?

f) ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared como se indica en la figura a continuación?.



4. Considere el sistema de la figura, en el que se tienen dos partículas de masa m unidas a las paredes con resortes verticales de longitud natural l_0 ($l_0 < L/2$) y constante k_1, y con resortes horizontales $l_0 = 0$ (slinkies) y constante k_2. Imagine que las partículas tienen la libertad de moverse en el plano y que el sistema es en ausencia de gravedad.



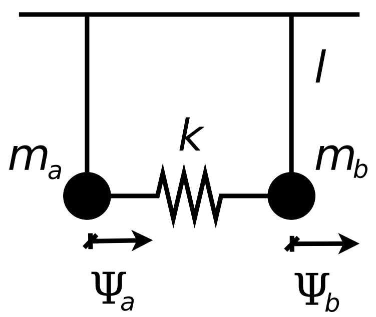
a) ¿Bajo qué aproximaciones es posible decir que el movimiento más general posible de cada una de las masas es una superposición lineal del movimiento más general posible de las oscilaciones longitudinales y de las oscilaciones transversales? Demuestre su afirmación.

b) Considerando la aproximación del punto anterior, determine las frecuencias propias y los modos normales de oscilación: longitudinales, transversales y de la solución más general posible para un movimiento arbitrario en el plano.

c) * *Si quisiera resolver el mismo problema con 5 partículas en vez de 2, la resolución de la matriz para hallar las frecuencias de oscilación "a mano" sería un tanto engorrosa. Plantee el problema para las 5 partículas en un notebook de Colab-Python y observe como el cálculo numérico le permite hallar con facilidad los modos de oscilación.*

Batidos y Pulsaciones

5. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b, acoplados mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0.



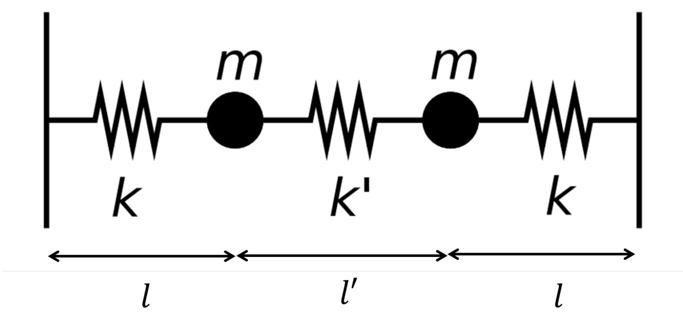
   a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es slinky?.

   b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

   c) Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l}\frac{m_a m_b}{m_a+m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 0{,}1$; obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo. * *Nota: probablemente halle muy cómodo graficar sus resultados utilizando el Colab-Python. Aproveche y varíe parámetros que le permitan comprender mejor cómo es el acoplamiento en función de los parámetros de interés*

   d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b, donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

6. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k', tal que todos tienen longitud natural l_0 y en posiciones de equilibrio l, l' y l como indica la figura.



   a) Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema (considere pequeñas oscilaciones).

   b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Sistemas forzados - Coordenadas Normales

7. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 5 , tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza por unidad de longitud dada por $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

   a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y vea que si no considera las condiciones $m_a = m_b = m$ o $F_{roz_i} = \hat{\gamma} m_i \dot{\psi}_i$ con $i = a, b$, las ecuaciones no se desacoplan utilizando las coordenadas normales del sistema.

b) Considere entonces $m_a = m_b = m$, resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.

c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.

d) Muestre que despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right];$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m}\cos(\Omega t)\left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2}\right];$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

e) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no. *Nota: ayúdese para graficar con el Colab-Python*

8. Considere el sistema del problema 6, pero en este caso considere las oscilaciones longitudinales.

a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante del tipo $f(t) = f_0\ cos(\Omega t)$ ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?

b) *Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad

c) * Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema