Verano 2022

Guía 6: Paquetes de Onda

Velocidad de Fase y de Grupo

1. Demuestre que la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v_f están relacionadas por: $v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$? ¿Cómo es $\frac{dv_f}{d\lambda}$ en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

2. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.

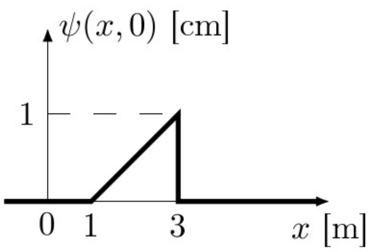
   a) Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.

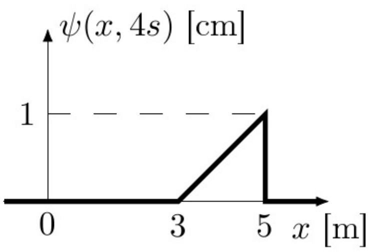
   b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).

   c) Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.

   d) Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

3. Una perturbación se propaga en una cuerda infinita con velocidad v. Las figuras la muestran en $t = 0$ y $t = 4\,\text{s}$. Determine v y $\psi(x,t)$.





Transformada de Fourier

4. Si $\psi(\omega)$ corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea $\psi(\omega) = 1/\Delta\omega$ para ω comprendida en el intervalo de ancho $\Delta\omega$ alrededor de ω_0, y cero en otra parte; vea que $\phi(t)$ está dada por: $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2}\right] \cos(\omega_0 t)$.

   a) Grafique $\hat{\phi}(\omega)$ y $|\phi(t)|$ para $\omega_0 = 100\,\text{s}^{-1}$ y $\Delta\omega = 4\,\text{s}^{-1}$. ¿Qué parte de la expresión de $\phi(t)$ impone límites temporales para el paquete de mayor amplitud? Determine tales límites.

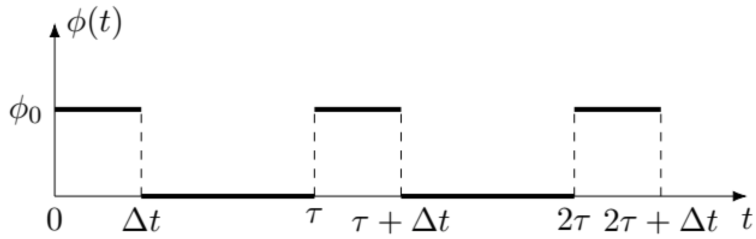
   b) Sea T un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si $\Delta\omega$ es suficientemente pequeño como para que $\Delta\omega T \ll 1$, entonces durante un tiempo menor que T, $\phi(t)$ es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

5. **Propiedades de la trasformada**

   a) **Linealidad de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$**
   Muestre que $\mathcal{F}$ es lineal, por tanto $\mathcal{F}(af(x) + bg(x)) = a\mathcal{F}f(x) + b\mathcal{F}g(x)$, donde a, b son constantes.

b) **Conjugación de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$**
Muestre que si $\phi(t) \in \mathcal{R}$ y $\hat{\phi}(\omega) = \mathcal{F}[\phi(t)]$ es su transformada de Fourier, esta última cumple que $\overline{\hat{\phi}(\omega)} = \hat{\phi}(-\omega)$, es decir, que para obtener su conjugada de la transformada basta con invertir el signo de ω.
Aproveche esto para escribir $\phi(t)$ como superposición de senos y cosenos.

6. * Sea $\phi(t)$ una serie de pulsos cuadrados de duración Δt que se presentan N veces con un período τ ($\Delta t < \tau$) tal como muestra la figura. Si $f(n,t)$ describe la función en cualquiera de los intervalos $[n\tau, (n+1)\tau]$ que contiene estos pulsos de amplitud no nula ϕ_0 en $[n\tau, n\tau + \Delta t]$ de forma que $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n,t)$,



a) Compruebe que

$$\hat{\phi}(\nu) = \mathcal{F}\phi(t) = \mathcal{F}\left[\sum_{n=0}^{N-1} f(n,t)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-in\omega\tau}\,\mathcal{F}f(0,t).$$

b) Resuelva $\mathcal{F}f(0,t)$ para obtener la expresión completa de $\hat{\phi}(\nu) = \mathcal{F}\phi(t)$.

c) El rasgo más prominente de $\hat{\phi}(\nu)$ son picos en $\nu_p = p\nu_1$ ($p \in \mathbb{N}$) donde $\nu_1 = \frac{1}{\tau}$, es decir, una serie de armónicos de ν_1. Encuentre en la expresión de $\hat{\phi}(\nu)$ el término que depende de τ responsable de este comportamiento y verifique ν_p.

d) De similar análisis identifique qué término con dependencia en Δt hace que los armónicos más importantes se detecten en $0 < \nu < \frac{1}{\Delta t}$.

e) Compruebe también que el ancho de banda de los armónicos es $\delta\nu = \frac{2}{N\tau}$, y calcule cuánto más pequeño es que el $\Delta\nu$ entre sucesivos ν_p.

7. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfasaje de las frecuencias que lo componen.

a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho Δk centrado en k_0 (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = Aexp\left[-\frac{(k-k_0)^2)}{4\Delta k^2}\right]$$

Calcule $f(x)$ y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia k_0. Note que el pulso está centrado en $x = 0$y que se cumple la relación $\Delta x \Delta k = 1/2$(el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = Aexp\left[-\frac{(k-k_0)^2)}{4\Delta k^2}\right] exp[i\alpha(k-k_0)]$$

Calcule $f(x)$ y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en α hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

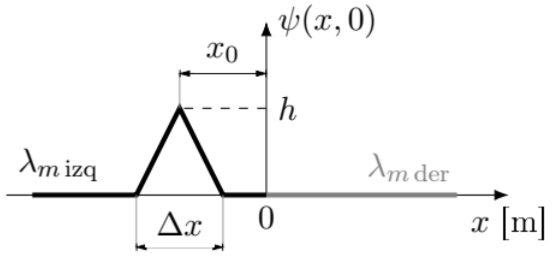
$$F(k) = Aexp\left[-\frac{(k-k_0)^2)}{4\Delta k^2}\right] exp[i\beta(k-k_0)^2]$$

Calcule $f(x)$ y vea que es un pulso gaussiano centrado en $x = 0$ pero con un ancho Δx que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar Δk? Derive Δx con respecto a Δk de la expresión anterior y analice lo pedido.
Ayuda: $\int_{-\infty}^{+\infty} exp[(x+a)^2]dx = \sqrt{\pi}$

8. **Interfaz entre medios no dispersivos** Dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa, $\lambda_{m\,\text{izq}}$ y $\lambda_{m\,\text{der}}$, están unidas y sometidas a una tensión T_0. Sobre la primera se propaga hacia $+\hat{x}$ la perturbación que muestra la figura. Se conocen $\lambda_{m\,\text{izq}}$, $\lambda_{m\,\text{der}}$, T_0, x_0, Δx y h, y se considera que los medios son no dispersivos.



a) Hallar el desplazamiento $\psi(x,t)$.

b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el medio es dispersivo.