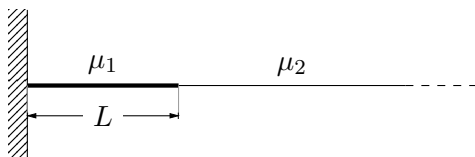


## Reflexión y transmisión en cuerdas

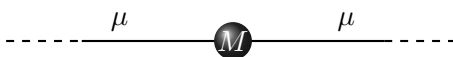
1. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas, de densidades lineales  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión constante  $T_0$ . Sobre la primera cuerda (la de densidad  $\mu_1$ ) incide una onda de la forma:  $\psi_I(x, t) = A_I \cos(k_1 x - \omega t)$ . Se conocen:  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $T$ ,  $\omega$  y  $A_I$ .



- a) Calcule  $k_1$  y  $k_2$ , es decir, los números de onda de cada lado de la unión.
  - b) Plantee la solución más general para  $\psi(x, t)$  de cada lado de la unión.
  - c) ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?
  - d) Usando (b) y (c), calcule la perturbación  $\psi(x, t)$  en cada una de las cuerdas.
  - e) Determine coeficientes de reflexión,  $R$ , y transmisión,  $T$ . ¿Qué sucede en el caso  $\mu_2 \rightarrow \infty$ ? ¿Y si  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$ ?
2. La cuerda de la izquierda, de densidad lineal  $\mu_1$  y largo  $L$ , se encuentra fija en su extremo izquierdo a la pared, y en su extremo derecho a otra cuerda semi-infinita de densidad  $\mu_2$ . Todo el sistema se encuentra sometido a la misma tensión  $T_0$ . Suponga que por la cuerda de densidad  $\mu_2$  incide la onda armónica  $\psi_I(x, t) = A_I e^{i(\omega t + k_2 x)}$ .



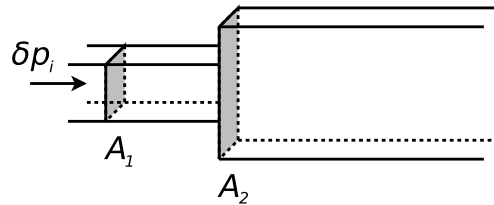
- a) Imponga las condiciones de contorno apropiadas y determine  $\psi(x, t)$  en cada sección del sistema.
  - b) Halle los valores de  $L$  para los cuales hay un nodo de desplazamiento en la unión de las cuerdas.
3. Una cuerda de densidad lineal  $\mu$  sometida a una tensión  $T_0$  tiene en su centro,  $x = 0$ , un pequeño nudo de masa  $M$ . Cuando una onda  $\psi_i(x, t) = A_i e^{i(kx - \omega t)}$  incide desde el infinito, el nudo causa que parte de la onda incidente sea reflejada, y otra parte transmitida.



- a) Plantee la solución más general para la onda  $\psi(x, t)$  a cada lado del nudo.
- b) ¿Qué condiciones de empalme deben verificarse en el nudo?
- c) Demuestre que una condición le permite definir que  $A_I + A_R = A_T$  y que la otra implica que  $A_I - A_R = (1 + i \frac{M\omega^2}{kT}) A_T$ , siendo  $A_I$ ,  $A_R$  y  $A_T$  las amplitudes complejas para las ondas incidente, reflejada y transmitida, respectivamente.

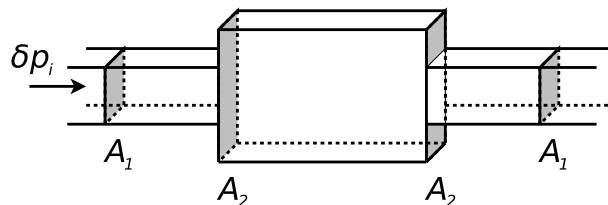
## Reflexión y transmisión en ondas acústicas

4. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma  $\delta p_I(x,t) = A_I \cos(k_1 x - \omega t)$  incide desde el primer caño hacia  $x > 0$ . Hallar las amplitudes de presión  $\delta p$  y desplazamiento  $\psi$  de las ondas reflejadas y transmitidas.



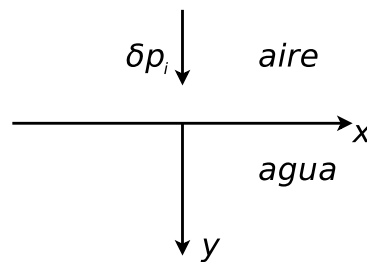
**Datos:**  $A_1$ ,  $A_2$ , presión media  $P_0$ , densidad media  $\rho_0$ ,  $v_s$ ,  $\omega$ ,  $A_i$ . Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.

5. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar  $\delta p(x,t)$  y  $\psi(x,t)$  en cada tramo.

6. Se tiene una interfase plana e infinita entre aire y agua (ver figura).

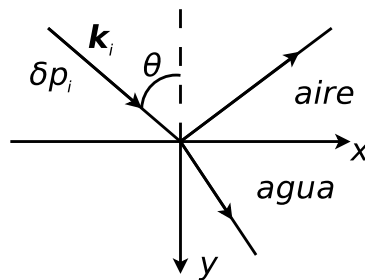


Desde el aire incide una onda acústica plana cuya dirección de propagación es normal a la interfase; se escribe  $\delta p_I(y,t) = A_I \cos(k_{\text{aire}} y - \omega t)$ . Hallar las ondas reflejadas y transmitidas  $\delta p_R(y,t)$  y  $\delta p_T(y,t)$ .

7. Considere la ecuación de ondas clásica en tres dimensiones.

- Demuestre que la función  $\psi(\mathbf{r},t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$ , con  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$  un vector constante y  $\mathbf{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$ , es solución de la ecuación de ondas tridimensional. **Sugerencia:** exprese el laplaciano en coordenadas cartesianas.
- Analice el significado físico de  $\psi(\mathbf{r},t)$ . ¿Cómo son los frentes de onda? ¿Cuál es la relación entre el vector  $\mathbf{k}$  y los frentes de onda? ¿Hacia dónde se desplazan los frentes de onda al transcurrir  $t$ ? ¿A qué velocidad?

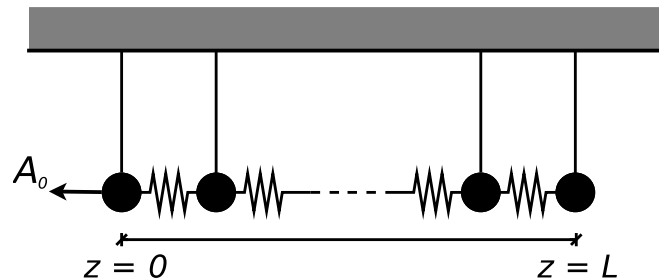
- c) Rehaga el problema anterior suponiendo que la onda incidente (desde el aire) forma un ángulo  $\theta$  con la normal a la interfase (ver figura).



Por lo tanto la onda de presión incidente se escribe, si usamos notación compleja:  $\delta p_I(\mathbf{r}, t) = A_I e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , siendo  $\mathbf{k}_I = \frac{\omega}{v_s} (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$ , con  $v_s$  la velocidad del sonido en aire. Hallar la onda reflejada  $\delta p_R(\mathbf{r}, t) = A_R e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  y la transmitida  $\delta p_T(\mathbf{r}, t) = A_T e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ .

## Regímenes de propagación dispersivo y reactivo

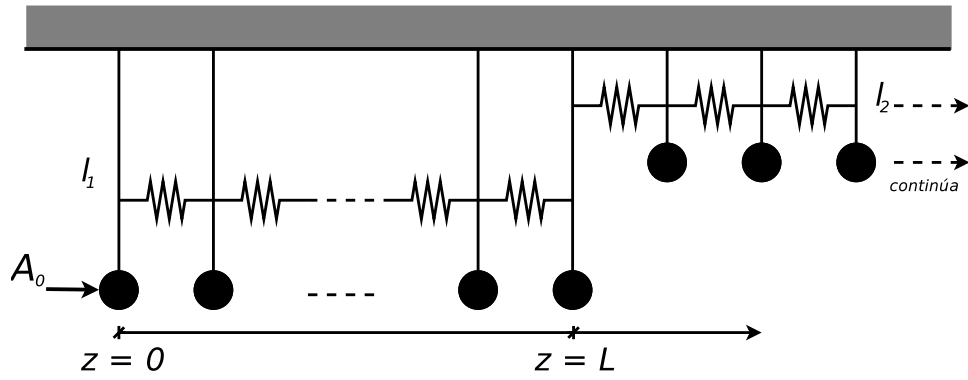
8. Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en  $z = 0$  y unidos a una pared rígida en  $z = L$ , como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ( $z = 0$ ), de forma tal que se conoce su amplitud  $\psi(0, t) = A_0 \cos(\Omega t)$ . Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

**Sugerencia:** Use la aproximación continua (mediante la ecuación de Klein-Gordon) para simplificar los cálculos.

9. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en  $\omega_0^2$  en  $z = L$ , según se esquematiza en la figura. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace.



10. Para el sistema esquematizado en la figura, calcule  $\psi_n(t)$ , si  $\Omega < \omega_{\text{mín}}$ .

