

## Velocidad de grupo y de fase

1. Discuta cuál de estos métodos permite determinar la velocidad de fase y cuál la de grupo:
  - a) Medir el tiempo que tarda un pulso sonoro (por ejemplo, un aplauso) en impactar sobre una superficie reflectora ubicada a una distancia conocida. y volver a su punto de partida.
  - b) Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).
  - c) Medir el tiempo que tarda un pulso luminoso en recorrer una distancia conocida.
  - d) Medir la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo y frecuencia conocidos.
2. Obtenga la velocidad de fase y de grupo para los siguientes casos. Compárelas y discuta en cuales casos ambas velocidades son similares.
  - a) Ecuación de ondas clásica.
  - b) Ecuación de Klein-Gordon, considerando las siguientes situaciones:
    - 1)  $\omega_0 = 0$ , con  $c$  y  $k_0$  arbitrarios.
    - 2)  $\omega_0 = 1\text{s}^{-1}$  y  $c = 1\text{ms}^{-1}$ , con  $k_0$  tomando los valores:  $1\text{m}^{-1}$ ,  $3\text{m}^{-1}$ , y  $10\text{m}^{-1}$ .
3. Demuestre que la velocidad de grupo  $v_g$  y la velocidad de fase  $v_f$  están relacionadas por:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

¿Cómo es  $\frac{dv_f}{d\lambda}$  en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

## Paquetes Gaussianos

4. **Función Gaussiana:** Considere la siguiente función de una coordenada arbitraria  $z$ :

$$f(z) = A \exp \left[ -\frac{(z - \mu)^2}{4\Delta^2} \right],$$

conocida como función de Gauss (*aka* campana de Gauss, función normal, etc.), cuyos parámetros  $A$ ,  $\mu$  y  $\Delta$  son conocidos.

- a) Muestre analítica o gráficamente que esta función:
  - es definida positiva (si  $A > 0$ ).
  - tiene un único máximo en  $z = \mu$ .
  - tiende a 0 para  $z \rightarrow \pm\infty$ .

- b) Determine el desplazamiento en  $z$  respecto a la posición del máximo, necesario para que la altura de la función se reduzca a la mitad. Es decir, obtenga  $\Delta z$  tal que:

$$f(\mu \pm \Delta z) = 1/2 f(\mu)$$

Utilice este resultado para definir el ancho de la campana. ¿Qué parámetro de la función determina dicho ancho?

- c) ¿A qué altura de la función corresponde el ancho definido por  $2\Delta$ ?

5. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen.

- a) Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  (note que las frecuencias están en fase):

$$\hat{\psi}(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right].$$

Calcule  $\psi(x)$  y vea que tiene una envolvente Gaussiana que modula una portadora de frecuencia  $k_0$ . Note que el pulso está centrado en  $x = 0$  y que se cumple la relación  $\Delta x \Delta k = 1/2$  (el paquete Gaussiano es el de mínima incerteza).

- b) Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$\hat{\psi}(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\alpha(k - k_0)].$$

Calcule  $\psi(x)$  y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en  $\alpha$  hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

- c) Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$\hat{\psi}(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\beta(k - k_0)^2].$$

Calcule  $\psi(x)$  y vea que es un pulso gaussiano centrado en  $x = 0$  pero con un ancho  $\Delta x$  que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

Verifique que el producto de ambos anchos cumple la relación de incerteza general  $\Delta x \Delta k \geq 1/2$ , y luego determine el valor de  $\beta$  tal que se cumpla la relación de mínima incerteza  $\Delta x \Delta k = 1/2$ .

- d) A partir del resultado anterior, discuta si es cierto que, si se quiere disminuir el ancho espacial de un paquete ( $\Delta x$ ), *siempre* se debe aumentar su ancho espectral ( $\Delta k$ ). ¿Contradice esto a la relación de incerteza mínima?

**Sugerencia:** Puede ser útil obtener  $\Delta x$  como función de  $\Delta k$ , y luego graficar o derivar la primera en función de la segunda.

**Ayuda:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-(x + a)^2] dx = \sqrt{\pi}$ .

6. Repita el ejercicio anterior, considerando que el espectro  $\hat{\psi}(k)$  corresponde a un pulso que se propaga en un medio arbitrario evaluado en  $t = 0$ . Resuelva analíticamente a partir de la linealización de la relación de dispersión y halle  $\psi(x, t)$  en cada caso. ¿Qué supuestos debe verificar el espectro para que el desarrollo sea lo más exacto posible?

7. Se tiene un pulso de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$

donde  $\omega' = \frac{d\omega}{dk}$  y  $\omega'' = \frac{d^2\omega}{dk^2}$ . Si en  $t = 0$  el pulso se propaga hacia  $x < 0$ , y se escribe:

$$\psi(x, 0) = \Re \left[ A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp(ikx) dk \right],$$

calcule  $\psi(x, t)$ . Obtenga la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que cualquier paquete se ensancha al viajar por un medio dispersivo?

## Propiedades de la transformada de Fourier

8. Sea  $f(t)$  una función real del tiempo. Muestre que su transformada de Fourier  $\mathcal{F}[f]$  es una función de la frecuencia angular  $\hat{f}(\omega)$  que cumple  $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$ . Use esto para escribir a  $f(t)$  como superposición de senos y cosenos.
9. Muestre que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es una transformación lineal, es decir:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de  $x$ , y  $a$  y  $b$  son constantes.

## Paquetes cuadrados

10. Considere un espectro de frecuencias cuadrado, centrado en una frecuencia angular  $\omega_0$  y de ancho  $\Delta\omega$ :

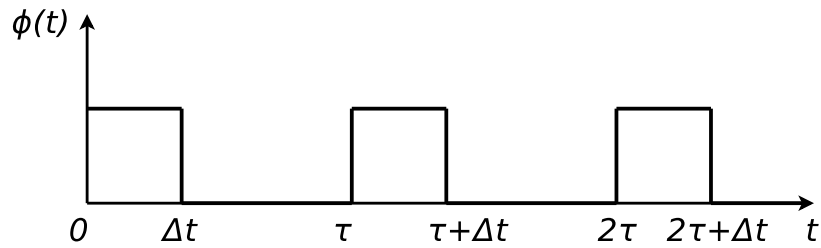
$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} \Delta\omega^{-1}, & \text{si } \omega \in [\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}] \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1)$$

- a) Grafique el espectro  $\hat{\phi}(\omega)$ .
- b) Verifique que este espectro corresponde a una función  $\phi(t)$  dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\frac{\Delta\omega}{2}t} \right] e^{i\omega_0 t}$$

y grafique su módulo  $|\phi(t)|$ .

- c) Sea  $T$  un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T \ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que  $T$ ,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase prácticamente constantes. Elija valores numéricos razonables para  $T$  y  $\Delta\omega$ , y grafique el espectro correspondiente.
11. Considere una secuencia de pulsos de duración  $\Delta t$  y amplitud  $A_0$  que se repiten  $N$  veces con período  $\tau$  (con  $\tau < \Delta t$ ), dando lugar a la siguiente señal  $\phi(t)$ :



- a) Considere la función que describe a un pulso situado en el intervalo  $[n\tau, (n+1)\tau]$ :

$$\phi_n(t) = \begin{cases} A_0, & \text{si } t \in [n\tau, n\tau + \Delta t] \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2)$$

de forma que  $\phi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n(t)$ . Compruebe que la transformada de  $\phi_n(t)$  es igual a la transformada de  $\phi_0(t)$ , multiplicada por una fase  $e^{in\theta}$ .

- b) Obtenga  $\hat{\phi}_0(\omega)$  y a partir de la misma obtenga  $\hat{\phi}(\omega)$ .  
 c) Grafique el espectro de amplitudes  $|\hat{\phi}(\omega)|$  o bien de energías  $|\hat{\phi}(\omega)|^2$ .

**Ayuda:** Puede resultarle útil la siguiente identidad para series geométricas:

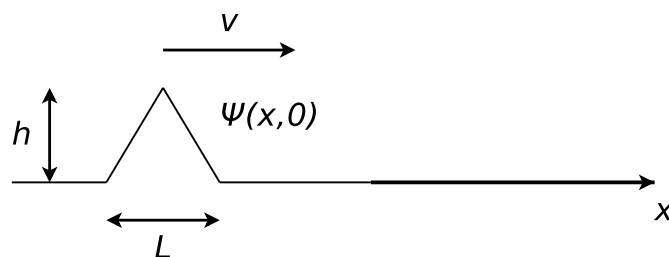
$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\alpha n} = \frac{e^{-2i\alpha N} - 1}{e^{-2i\alpha} - 1} = e^{-i\alpha(N-1)} \frac{\sin(\alpha N)}{\sin(\alpha)}$$

con  $\alpha = \pi\nu\tau$ .

- d) Considere la duración total de la señal  $T_{\text{tot}} = N\tau$ . Verifique que, para un valor finito de  $T_{\text{tot}}$ , el espectro está formado por una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental  $\nu_1 = \tau^{-1}$ , siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho  $\Delta\nu \approx T_{\text{tot}}^{-1}$ . Verifique también que los componentes armónicos más importantes se encuentran en el intervalo de frecuencias dado por  $[0, \nu_{\text{máx}}]$ , con  $\nu_{\text{máx}} = \Delta t^{-1}$ .  
 e) ¿Por qué vale  $\nu_{\text{máx}}\Delta t \approx 1$  si, en principio, podría valer  $\nu_{\text{máx}}\Delta t \gg 1$ ? ¿La misma pregunta es aplicable a  $\Delta\nu$  y  $T_{\text{tot}}$ ?

## Propagación de paquetes en interfaces

12. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa,  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , unidas en un punto y sometidas a una tensión  $T_0$ . Sobre la primera, se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura, a velocidad  $v$ . Se conocen  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $T_0$ ,  $L$  y  $h$ .



- a) Hallar el desplazamiento  $\psi(x, t)$  considerando que los medios son no dispersivos.  
 b) Explique cualitativamente cómo cambian estos resultados si el segundo medio es dispersivo.