Apunte de fórmulas útiles para Física 2

Zoe Zaidán

26 de septiembre de 2023

Ortogonalidad

Dos funciones, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, son ortogonales entre sí si

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) = 0$$

.

Es decir, si el producto interno del espacio de funciones es cero. Si tomamos $f(x) = sin(x)$ y $g(x) = cos(x)$, podemos ver resolviendo la integral entre $[0, 2\pi]$ que da 0, lo que implica que, los elementos de la base del espacio de funciones $\{sin(x), cos(x)\}$ son ortogonales entre sí.

Propiedades de ortogonalidad

$$\int_0^L sin(k_{n'}x)sin(k_n x)dx = \frac{L}{2}\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\int_0^L sin(k_{n'}x)sin(k_n x)dx = \frac{L}{2}\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

$$\int_0^L cos(k_{n'}x)cos(k_n x)dx = \frac{L}{2}\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{n\pi}{L} \;\; n, n' \neq 0$$

$$\int_0^L cos(k_{n'}x)cos(k_n x)dx = \frac{L}{2}\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \;\; n, n' \neq 0$$

$$\int_{-L}^L sin(k_{n'}x)sin(k_n x)dx = L\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$\int_{-L}^L cos(k_{n'}x)cos(k_n x)dx = L\delta_{n'n}, \;\; k_n = \frac{n\pi}{L} \;\; n, n' \neq 0$$

$$\int_0^{+\infty} sin(k'x)sin(kx)dx = \frac{\pi}{2}\delta(k'-k), k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} sin(k'x)sin(kx)dx = \pi\delta(k'-k), k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} cos(k'x)cos(kx)dx = \pi\delta(k'-k), k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k'-k)x}dx = 2\pi\delta(k'-k), k \in \mathbb{R}$$

Y otras integrales útiles son:

$$\int xsin(kx)dx = \frac{1}{k^2}(sin(kx) - kxcos(kx)) + cte$$

$$\int xcos(kx)dx = \frac{1}{k^2}(kxsin(kx) + cos(kx)) + cte$$

Funciones pares e impares

Una función par es tal que verifica $f(-x) = f(x)\ \forall x$. En cambio, una función impar es tal que $f(-x) = -f(x)\ \forall x$. Estas funciones cumplen las siguientes propiedades:

- El producto de dos funciones pares es par
- El producto de dos funciones impares es par
- El producto de una función par y una impar es impar
- La suma/resta de funciones pares es par
- La suma/resta de funciones impares es impar
- Si f es par: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Si f es impar:$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Delta de Kronecker

La delta de Kronecker se define como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ si\ i = j \\ 0 \ \ si\ i \neq j \end{cases}$$

Dato curioso: es un tensor de rango 2 (no se asusten, no importa entender ahora qué significa eso).

Delta de Dirac

La delta de Dirac es una distribución que se define como

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty \ \ si\ x = a \\ 0 \ \ si\ x \neq a \end{cases}$$

Gráficamente, esto se ve

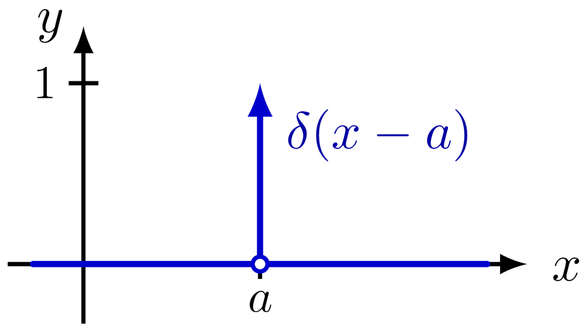

Figura 1: Gráfico de la delta de Dirac

Además,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

o, si queremos integrar en un intervalo finito:

$$\int_{a}^{b} \delta(x-x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) \;\; si \; a \leq x_0 \leq b \\ 0 \;\; si \; no \end{cases}$$

Por último, veamos tres propiedades:

- $\delta(x) = \delta(-x)$ (es par)
- $\delta'(x) = -\delta'(-x)$ (es impar)
- $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

Propiedades trigonométricas

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \quad sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \quad cosec(x) = \frac{1}{sin(x)} \quad cot(x) = \frac{1}{tan(x)} = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - cos(2x)) \quad cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$$

$$2sin(x)sin(y) = cos(x-y) - cos(x+y) \quad sin(x \pm y) = sin(x)cos(y) \pm sin(y)cos(x)$$

$$2cos(x)cos(y) = cos(x-y) + cos(x+y) \quad cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sin(x)sin(y)$$

$$2sin(x)sin(y) = sin(x-y) + sin(x+y) \quad tan(x \pm y) = \frac{tan(x) \pm tan(y)}{1 \mp tan(x)tan(y)}$$

Propiedades de funciones hiperbólicas

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$

$$cosech(x) = \frac{1}{sinh(x)} \quad sech(x) = \frac{1}{cosh(x)} \quad cotanh(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$$

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1 \quad sinh(x \pm y) = sinh(x)cosh(y) \pm sinh(y)cosh(x)$$

$$tanh(x \pm y) = \frac{tanh(x) \pm tanh(y)}{1 \pm tanh(x)tanh(y)} \quad cosh(x \pm y) = cosh(x)cosh(y) \pm sinh(x)sinh(y)$$

$$\frac{d}{dx}sinh(x) = cosh(x) \quad \frac{d}{dx}cosh(x) = sinh(x) \quad \frac{d}{dx}tanh(x) = sech^2(x)$$

De las funciones trigonométricas e hiperbólicas, ¿cuáles son pares? ¿Y cuáles impares?