La ecuación de onda

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad\qquad \psi = A\,e^{ikx}\,e^{-i\omega t} \tag{1}$$

Esto conduce a la relación de dispersión:

$$\omega^2 = c^2k^2 \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = c\,|k| \tag{2}$$

Solución de modo

La relación de dispersión indica que para un único k (en módulo) hay una solución de onda progresiva ($\omega = ck$) y otra regresiva ($\omega = -ck$). El modo es la combinación lineal de ambas.

$$\psi_k = A\, e^{i(kx-\omega t)} + B\ e^{i(-kx-\omega t)} \tag{3}$$

donde los coeficientes son complejos $A = a + ia'$ y $B = b + ib'$.

Recordar que la solución de modo es válida para $0 \leq x \leq L$ y $t > 0$.

Condiciones de borde (Dirichlet)

Si pedimos que la solución se anule en $x = 0$, esto se expresa como

$$\Re e[\psi_k(0,t)] = 0 \quad \Rightarrow \quad (a+b)\,\cos(\omega t) + (a'+b')\,\mathrm{sen}\,(\omega t) = 0 \quad (4)$$

Las funciones $\{\cos(\omega t),\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\}$ forman una base ortogonal, por lo que la igualdad sólo se cumple si $a + b = 0$ y $a' + b' = 0$.
Entonces $B = -A$.

$$\psi_k = A\left[e^{ikx} - \, e^{-ikx}\right]e^{-i\omega t} = 2iA\,\mathrm{sen}\,(kx)\,e^{-i\omega t} \qquad (5)$$

Observar que $\Re e[\psi_k(L,t)] = \Re e[2iA\,e^{-i\omega t}]\,\mathrm{sen}\,(kL)$

Condiciones de borde (Neumann)

Si pedimos que la solución sea máxima (o mínima) en $x = 0$, esto se expresa como

$$\left.\frac{\partial \Re e[\psi_k]}{\partial x}\right|_{(0,t)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (b' - a')\, \cos(\omega t) + (b - a)\, \mathrm{sen}\,(\omega t) = 0 \quad (6)$$

Las funciones $\{\cos(\omega t), \mathrm{sen}\,(\omega t)\}$ forman una base ortogonal, por lo que la igualdad sólo se cumple si $b - a = 0$ y $b' - a' = 0$. Entonces $B = A$.

$$\psi_k = A\left[e^{ikx} + e^{-ikx}\right] e^{-i\omega t} = 2A\, e^{-i\omega t}\, \cos(kx) \qquad (7)$$

Observar que $\Re e[\psi_k(L,t)] = \Re e[2A\, e^{-i\omega t}]\, \cos(kL)$

Observaciones finales

- La solución espacial en condición de Dirichlet que se obtuvo es

$$\psi_k(x) = C \operatorname{sen}(kx) \tag{8}$$

y es equivalente a pedir $\Re e \left[C\, e^{ikx} \right]_{x=0} = 0$

- La solución espacial en condición de Neumann que se obtuvo es

$$\psi_k(x) = C \cos(kx) \tag{9}$$

y es equivalente a pedir $\Re e \left[ikC\, e^{ikx} \right]_{x=0} = 0$