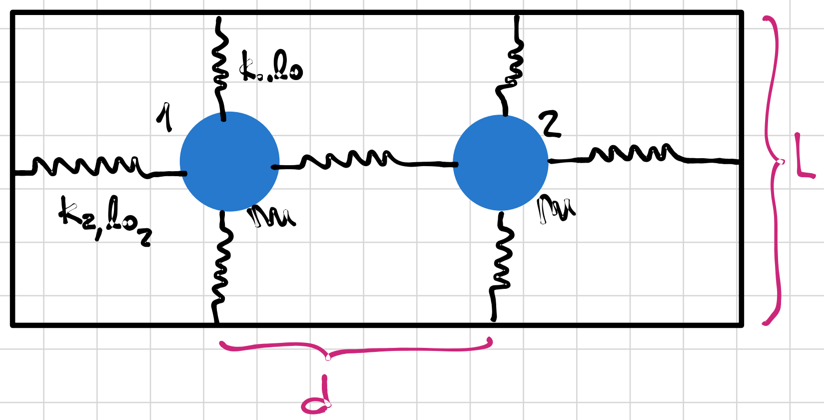
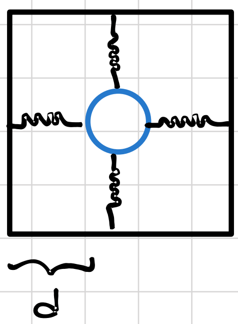
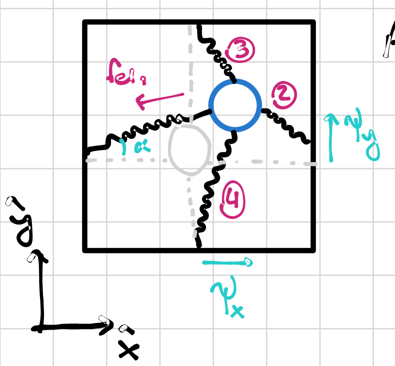
PROBLEMA 4



Veamos primero un problema análogo:



Planteamos las ecuaciones de Newton para este problema:



Aparto la masita de su posición de equilibrio. ¿Cómo son las fuerzas presentes?

$$F_{el,1} = -k\left(\sqrt{\psi_y^2 + (d+\psi_x)^2} - l_0\right)(\cos\alpha\,\hat{x} + \sin\alpha\,\hat{y}).$$

estiramiento del resorte.

$$\cos\alpha = \frac{\psi_x + d}{\sqrt{(\psi_x+d)^2 + \psi_y^2}} \qquad \sin\alpha = \frac{\psi_y}{\sqrt{(\psi_x+d)^2 + \psi_y^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el,1} = -k\left(\sqrt{\psi_y^2 + (\psi_x+d)^2} - l_0\right)\left[\frac{\psi_x+d}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}}\hat{x} + \frac{\psi_y}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}}\hat{y}\right]$$

¡Esto es no lineal! Tenemos que aproximar por pequeños apartamientos (en ambas variables).

Recordemos el desarrollo de Taylor en 2D:

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) + \dots$$

(desarrollo de Taylor a 1er orden).

Volviendo a nuestro caso,

$$F_{el,1x} = -k\left(\sqrt{\psi_y^2 + (\psi_x+d)^2} - l_0\right)\frac{\psi_x+d}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}}$$

Desarrollamos en Taylor alrededor del $(0,0)$.

- $F_{el,1x}(0,0) = -k(d - l_0)$

$$\frac{\partial F_{el,x}}{\partial \psi_x} = -k\left(\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(\psi_x+d)}{\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}}\right)\frac{(\psi_x+d)}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - k\left(\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}-l_0\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - \frac{1}{2}\frac{\cancel{2}(\psi_x+d)^2}{((\psi_x+d)^2+\psi_y^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_{el,x}}{\partial \psi_x}\right|_{(0,0)} = -k - k.(d-l_0).0 = -k$$

$$\frac{\partial F_{el,x}}{\partial \psi_y} = -k\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\psi_y}{\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}}\right)\frac{(\psi_x+d)}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - k\left(\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}-l_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(\psi_x+d)2\psi_y}{(\psi_y^2+(\psi_x+d)^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_{el,x}}{\partial \psi_y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

Análogamente,

$$F_{el,y} = -k\left(\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}-l_0\right)\cdot\frac{\psi_y}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}}$$

- $F_{el,y}(0,0) = 0$

$$\frac{\partial F_{el,y}}{\partial \psi_x} = -k\left(\frac{1}{2}\frac{2(\psi_x+d)}{\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}}\right)\frac{\psi_y}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - k\left(\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}-l_0\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\psi_y\cdot 2(\psi_x+d)}{((\psi_x+d)^2+\psi_y^2)^{3/2}}.$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_{el,y}}{\partial \psi_x}\right|_{(0,0)} = 0.$$

$$\frac{\partial F_{el,y}}{\partial \psi_y} = -k\left(\frac{1}{2}\frac{2\psi_y}{\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}}\right)\frac{\psi_y}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - k\left(\sqrt{\psi_y^2+(\psi_x+d)^2}-l_0\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\sqrt{(\psi_x+d)^2+\psi_y^2}} - \frac{1}{2}\frac{\psi_y\, 2\psi_y}{(\psi_y^2+(\psi_x+d)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial F_{el,y}}{\partial \psi_y}\right|_{(0,0)} = -k(d-l_0)\frac{1}{d} = -k + \frac{l_0}{d}k.$$

Ahora podemos escribir $\vec{F}_{el_1}$ de forma aproximada:

$$F_{el_1,x} \simeq -k(d-l_0) - k\psi_x = -k(d+\psi_x-l_0)$$

$$F_{el_1,y} \simeq -k\left(1-\frac{l_0}{d}\right)\psi_y .$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el_1} \simeq \underbrace{-k_2(d+\psi_x-l_{02})\,\hat{x}}_{\text{análogo a un resorte horizontal ejerciendo una fuerza longitudinal.}} \underbrace{-\,k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi_y\,\hat{y}}_{\text{análogo a un resorte horizontal ejerciendo una fuerza transversal.}}$$

Este resultado lo podemos generalizar (con cuidado) para los demás resortes.

$F_{el_2} \longrightarrow$ es análogo a F_{el_1}, sólo hay que reemplazar $(\psi_x+d) \longrightarrow (d-\psi_x)$

$$\Rightarrow \vec{F}_{el_2} = +k_2(d-\psi_x-l_{02})\,\hat{x} - k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi_y\,\hat{y}.$$

$F_{el_3} \longrightarrow$ Rotamos $90°$ y el problema es el mismo! (Encontramos una <u>simetría</u>)

$\Rightarrow$ Tenemos que intercambiar $x \longleftrightarrow y$ (con cuidado porque $d \neq L$, $k_1 \neq k_2$, $l_{01} \neq l_{02}$).

$$\vec{F}_{el_3} = -k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi_x\,\hat{x} + k_1\left(\frac{L}{2}-\psi_y-l_{01}\right)\hat{y}.$$

Por último, F_{el_4} la obtenemos reemplazando en la expresión de F_{el_3}, $\left(\frac{L}{2}-\psi_y\right) \longrightarrow \frac{L}{2}+\psi_y$.

$$\Rightarrow \vec{F}_{el_4} = -k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi_x\,\hat{x} - k_1\left(\frac{L}{2}+\psi_y-l_{01}\right)\hat{y}.$$

Ojo! Esto corresponde a una sola masa. En el problema original tenemos dos masas acopladas!

Volvamos al problema original: escribimos las ecuaciones de Newton para las masas 1 y 2 (ψ_1, ψ_2). El resultado va a ser análogo al anterior con la diferencia que el resorte del medio las acopla.

Para la masa 1:

$\hat{x})$ $m_1 \ddot{\psi}^1_x = -k_2(d+\psi^1_x - l_{02}) + k_2[d-(\psi^1_x - \psi^2_x) - l_{02}] - k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi^1_x - k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi^1_x$

$$\boxed{m_1 \ddot{\psi}_1 = -2k_2\psi^1_x + k_2\psi^2_x - 2k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi^1_x}$$

$\hat{y})$ $m_1 \ddot{\psi}^1_y = -k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi^1_y - k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)(\psi^1_y-\psi^2_y) + k_1\left(\frac{L}{2}-\psi^1_y - l_{01}\right) - k_1\left(\frac{L}{2}+\psi^1_y - l_{01}\right)$

$$\boxed{m_1 \ddot{\psi}^1_y = -2k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi^1_y + k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi^2_y - 2k_1\psi^1_y}.$$

Para la masa 2:

$\hat{x})$ $m_2 \ddot{\psi}^2_x = -2k_2\psi^2_x + k_2\psi^1_x - 2k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\psi^2_x$.

$\hat{y})$ $m_2 \ddot{\psi}^2_y = -2k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi^2_y + k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\psi^1_y - 2k_1\psi^2_y$.

$\longrightarrow$ LAS ECUACIONES EN $\hat{x}$ y en $\hat{y}$ ESTÁN DESACOPLADAS.

Escribimos el sistema matricialmente:

Tomo $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi^1_x \\ \psi^2_x \\ \psi^1_y \\ \psi^2_y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{\psi}} = -\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{2}{m}\left(k_2+k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\right) & -\frac{k_2}{m} & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{2}{m}\left(k_2+k_1\left(1-\frac{l_{01}}{L/2}\right)\right) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{2}{m}\left(k_1+k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\right) & -\frac{k_2}{m}\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{k_2}{m}\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right) & \frac{2}{m}\left(k_1+k_2\left(1-\frac{l_{02}}{d}\right)\right) \end{array}\right)}_{\mathbb{M}} \vec{\psi}$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{M}$ es una matriz de 4×4 por bloques. Podemos estudiar por separado los dos bloques de 2×2.

$\Rightarrow$ Definimos $\vec{\psi}_x = \begin{pmatrix} \psi_x^1 \\ \psi_x^2 \end{pmatrix}$; $\vec{\psi}_y = \begin{pmatrix} \psi_y^1 \\ \psi_y^2 \end{pmatrix}$

$$\ddot{\vec{\psi}}_x = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{m}\left(k_2 + k_1\left(1 - \frac{l_{01}}{L/2}\right)\right) & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{2}{m}\left(k_2 + k_1\left(1 - \frac{l_{01}}{L/2}\right)\right) \end{pmatrix}}_{M_x} \vec{\psi}_x$$

$$\ddot{\vec{\psi}}_y = -\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{m}\left(k_1 + k_2\left(1 - \frac{l_{02}}{d}\right)\right) & -\frac{k_2}{m}\left(1 - \frac{l_{02}}{d}\right) \\ -\frac{k_2}{m}\left(1 - \frac{l_{02}}{d}\right) & \frac{2}{m}\left(k_1 + k_2\left(1 - \frac{l_{02}}{d}\right)\right) \end{pmatrix}}_{M_y} \vec{\psi}_y$$

b) Resolvemos para ψ_x. Notación: $k_1\left(1 - \frac{l_{01}}{L/2}\right) \equiv \tilde{k}_1$

$\Rightarrow$ Propongo solución $\vec{\psi}_x(t) = \vec{A}_x \cos(\omega_x t + \varphi_x)$.

Tenemos que resolver el sistema $(M_x - \omega_x^2 \mathbb{1}) A_x = 0$

$\det(M_x - \omega_x^2 \mathbb{1}) = 0. \longrightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{2}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) - \omega^2 & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{2}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) - \omega^2 \end{pmatrix} = 0.$

$$\rightarrow \left(\frac{2}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) - \omega^2\right)^2 - \frac{k_2^2}{m^2} = 0.$$

$$\frac{4}{m^2}(k_2 + \tilde{k}_1)^2 - 2 \cdot \frac{2}{m}(k_2 + \tilde{k}_1)\omega_x^2 + \omega_x^4 - \frac{k_2^2}{m^2} = 0.$$

Tenemos una cuadrática en ω^2.

$$\omega_{x_{1;2}}^2 = \frac{\frac{4}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{m}\right)^2 (k_2 + \tilde{k}_1)^2 - 4\left(\frac{4}{m^2}(k_2 + \tilde{k}_1)^2 - \frac{k_2^2}{m^2}\right)}}{2}$$

$$= \frac{\frac{4}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) \pm \sqrt{\cancel{\frac{16}{m^2}(k_2 + \tilde{k}_1)^2} - \cancel{\frac{16}{m^2}(k_2 + \tilde{k}_1)^2} + \frac{4k_2^2}{m^2}}}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_{x_{1;2}}^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{4}^{\,2}}{m}(k_2 + \tilde{k}_1) \pm \frac{\cancel{2}k_2}{m}\right)$$

$$\boxed{\omega_{x_1}^2 = \frac{3k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m}.}$$

$$\boxed{\omega_{x_2}^2 = \frac{k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m}.}$$

FRECUENCIAS NORMALES DE OSCILACIÓN LONGITUDINAL.

Veamos cuáles son los autovectores:

$$\omega^2_{x_1} \longrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m} & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & -\frac{k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\cancel{m}}(-k_2 + \tilde{k}_1)\, v_1 - \frac{k_2}{\cancel{m}} v_2 = 0 \Rightarrow v_{2x} = \left(\frac{\tilde{k}_1}{k_2} - 1 \right) v_{1x}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tilde{k}_1}{k_2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega^2_{x_2} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m} & -\frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_2}{m} & \frac{k_2}{m} + \frac{\tilde{k}_1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{W}_x =$$

LA SOLUCIÓN EN Y VA A SER ANÁLOGA (QUEDA PARA USTEDES).

¿CÓMO ESCRIBIMOS EL MOVIMIENTO MÁS GENERAL?

$$\vec{\psi}_x(x,t) = A_x \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{2x} \end{pmatrix} \cos(\omega_{1x} t + \varphi_1) + B_x \begin{pmatrix} w_{1x} \\ w_{2x} \end{pmatrix} \cos(\omega_{2x} t + \varphi_2).$$

$$\vec{\psi}_y(x,t) = A_y \begin{pmatrix} v_{1y} \\ v_{2y} \end{pmatrix} \cos(\omega_{1y} t + \alpha_1) + B_y \begin{pmatrix} w_{1y} \\ w_{2y} \end{pmatrix} \cos(\omega_{2y} + \alpha_2).$$

$$\vec{\psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \vec{\psi}_x(x,t) \\ \vec{\psi}_y(x,t) \end{pmatrix}.$$