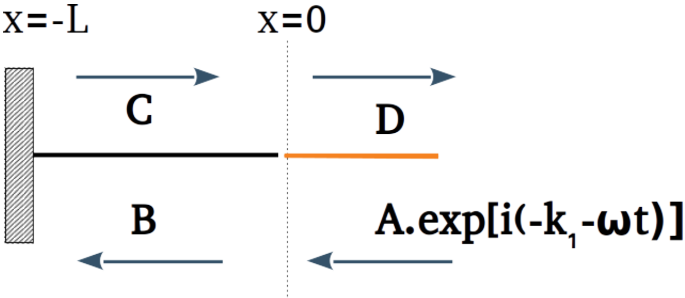
Guía 5: Problema 2



Guía 5: Problema 2

- Onda incidente en soga 2: $\psi_i(x,t) = A\, e^{i(-k_2 x - \omega t)}$
- Onda reflejada en soga 2: $\psi_r(x,t) = D\, e^{i(k_2 x - \omega t)}$
- Onda transmitida en soga 1: $\psi_t(x,t) = B\, e^{i(-k_1 x - \omega t)}$
- Onda reflejada en soga 1: $\tilde{\psi}_r(x,t) = C\, e^{i(k_1 x - \omega t)}$

Definimos: $R = D/A$ (coef. reflexión) y $T = B/A$ (coef. trasmisión)

Condiciones de Contorno

(a) $\psi_1(-L,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_t(-L) + \tilde{\psi}_r(-L) = 0$

(b) $\psi_1(0^-,t) = \psi_2(0^+,t) \quad \Rightarrow \quad \psi_t(0) + \tilde{\psi}_r(0) = \psi_i(0) + \psi_r(0)$

(c) $\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{0^-} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{0^+} \Rightarrow -ik_1\psi_t(0) + ik_1\tilde{\psi}(0) = -ik_2\psi_i(0) + ik_2\psi_r(0)$

La condición (a) indica que $\tilde{\psi}_r(0) = -e^{2ik_1L}\psi_t(0)$

La condición (b) indica que $\tilde{\psi}_r(0) = \psi_i(0) + \psi_r(0) - \psi_t(0)$

La condición (c) indica que $\tilde{\psi}_r(0) = -\frac{k_2}{k_1}\psi_i(0) + \frac{k_2}{k_1}\psi_r(0) + \psi_t(0)$

Condiciones de Contorno

Llamamos $z = e^{2ik_1L}$. Representa el desfasaje de la onda que recorre un camino $2L$.

Se elimina $\tilde{\psi}_r(0)$ de las dos últimas condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\psi_r(0) + (1-z)\psi_t(0) & = & \psi_i(0) \\ \\ \dfrac{k_2}{k_1}\psi_r(0) + (1+z)\,\psi_t(0) & = & \dfrac{k_2}{k_1}\psi_i(0) \end{array} \right. \tag{1}$$

Coeficientes T y R

Recordamos que $T = B/A$ y $R = D/A$. Las ecuaciones anteriores resultan:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -R \, + \, (1 - z)\, T & = & 1 \\ \\ R + \dfrac{k_1}{k_2}\,(1 + z)\, T & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

$$\text{sumando :} \quad (1 - z)\, T + \frac{k_1}{k_2}\,(1 + z)\, T = 2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2k_2}{(k_1 + k_2) + z(k_1 - k_2)} \tag{4}$$

Interpretación

$$T = \frac{2k_2}{(k_1+k_2)+z(k_1-k_2)} = \frac{2k_2}{k_2+k_1}\left(\frac{1}{1-\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}\,z}\right) \qquad (5)$$

- Observar que $T_0 = \frac{2k_2}{k_2+k_1}$ es el coeficiente de transmisión de dos sogas infinitas, unidas entre sí.
- Observar que $R_0 = \frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}$ es el coeficiente de reflexión de dos sogas infinitas, unidas entre sí.
- Recordar que $z = \exp(2ik_1L)$ es el desfasaje correspondiente a un recorrido de $2L$.

Interpretación

Como

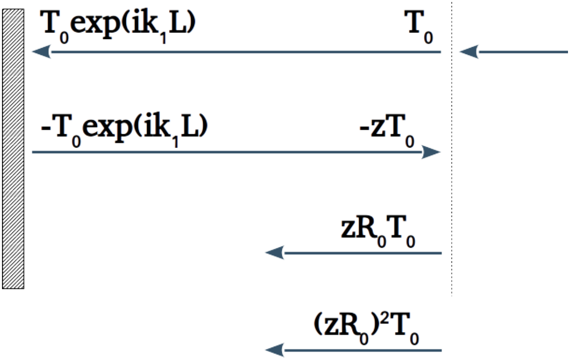
$$\frac{1}{1 - R_0 z} = 1 + R_0 z + (R_0 z)^2 + +(R_0 z)^3 + \ldots \tag{6}$$

Entonces

$$T = T_0 + T_0\, R_0 z + T_0\, R_0 z\, R_0 z + \ldots \tag{7}$$

Vemos que el coeficiente de transmisión total es la suma de la primera transmisión T_0, más la segunda $T_0\, R_0 z$, más la tercera $T_0\, R_0 z\, R_0 z$ y así sucesivamente para todos los rebotes.

Interpretación



Cada rebote añade una reflexión $-R_0$ y un desfasaje $-z$ debido al recorrido de la onda a lo largo de $2L$.

El mismo análisis se puede hacer para $R = (1 - z)\, T - 1$.