
FÍSICA 2 (FÍSICA) – CÁTEDRA RICARDO DEPINE

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2024

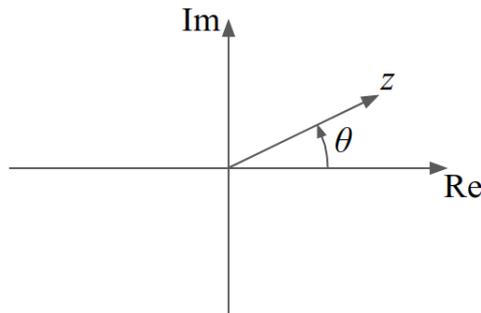
REPASO: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Para cada uno de los siguientes números, halle sus partes real e imaginaria, y dibújelos en el plano complejo:

- a) 0
- b) 1
- c) -1
- d) i
- e) $-i$
- f) i^2
- g) $1+i$
- h) $0i$
- i) $1/2$
- j) $(1/2)i$
- k) π
- l) πi
- m) $-1-i$
- n) $a+bi$ (considere todas las combinaciones posibles de a y b positivos y negativos)
- \tilde{n}) $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (considere todos los valores posibles de θ en un intervalo de longitud 2π)
- o) $(a^2 + b^2)^{1/2}$
- p) $(a^2 - b^2)^{1/2}$
- q) $i(a^2 + b^2)^{1/2}$
- r) $i(a^2 - b^2)^{1/2}$

Nota: a , b y θ son números reales.

2. Para un número complejo z , se define su módulo $|z|$ como la distancia euclídea que separa a z del origen del plano complejo. Escriba la expresión más general para el módulo de z en función de sus partes real e imaginaria, y luego aplíquela a cada caso del primer ejercicio.
3. Se define el argumento $\arg(z)$ de un número complejo z como el ángulo θ formado entre el eje real y la línea que va desde el origen a z , considerando positivo al sentido de giro que va desde el eje \Re^+ hacia el eje \Im^+ .



Halle el argumento para todos los números complejos del primer ejercicio.

4. Se define el conjugado de un número complejo $z = a + bi$ como $\bar{z} = a - bi$.

- a) Verifique que el conjugado de un número real es ese mismo número real.
- b) Verifique que el conjugado de un número imaginario puro es ese mismo número multiplicado por -1 .
- c) Verifique que el conjugado de un número complejo arbitrario corresponde a una reflexión (en el plano complejo) del número original respecto al eje real.
- d) ¿Cuál es el conjugado de 0 ?

Nota: El conjugado de z suele representarse también como z^* .

5. Obtenga el conjugado para todos los números del primer ejercicio, y determine sus partes real e imaginaria, su módulo y su argumento. Si es posible, use los resultados anteriores para ahorrar cuentas.

6. Verifique la siguiente identidad:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

7. Halle las partes real e imaginaria de los siguientes números:

- a) $\frac{1+i}{1-i}$
- b) $\frac{1+i}{1+i}$
- c) $(1+i)(1-i)$
- d) $(1+i)^2$
- e) $(1+i)^3$
- f) $(1+i)^4$
- g) $\sqrt{(1+i)(1-i)}$
- h) i^0
- i) i^n (con n entero positivo)
- j) $1/i^n$ (con n entero positivo)
- k) $1/(a+bi)$ (con a y b número reales, y $|a+bi|$ distinto de 0)
- l) $1/(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

Ayuda: Puede ser útil emplear la identidad del ejercicio anterior para trabajar con denominadores complejos.

8. ¿Cuáles de los siguientes datos me permiten determinar completamente a un número complejo cualquiera?

- a) Su parte real y su parte imaginaria
- b) Su parte real y la parte imaginaria de su conjugado
- c) Las partes real e imaginaria de su conjugado
- d) Su módulo y su parte real
- e) Su módulo y su parte imaginaria
- f) Su módulo y su argumento
- g) Su argumento y su parte real
- h) Su argumento y su parte imaginaria

9. Compare el plano complejo con el plano \mathbb{R}^2 . Analice similitudes y diferencias entre vectores de \mathbb{R}^2 y números complejos. ¿Es posible pensar a un número complejo como un vector? ¿Qué forma de representar un número complejo se parece a la representación cartesiana de un vector? ¿Y a la representación polar?

10. Considere la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

A partir de la misma, demuestre la identidad de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

11. Un número complejo z puede representarse en forma polar de la siguiente manera:

$$z = |z|e^{i \arg(z)}$$

a) Obtenga las partes real e imaginaria a partir de dicha representación.

b) Verifique, a partir de la definición de complejo conjugado, que el conjugado de $e^{i\theta}$ es $e^{-i\theta}$.

12. Obtenga y grafique las partes real e imaginaria de las siguientes funciones del tiempo:

a) $\exp(i\omega t)$

b) $\exp(-i\omega t)$

c) $\exp(i(\omega t + \pi/2))$

d) $\exp(i(\omega t - \pi/2))$

e) $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$

f) $i \exp(i\omega t)$

g) $-\exp(i\omega t)$

h) $1/2(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))$

i) $-1/2i(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t))$

13. A partir de la fórmula de Euler, demuestre que:

a) $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$

b) $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$

c) $\cosh(x) = \cos(ix)$ (con x real)

d) $\sinh(x) = -i \sin(ix)$ (con x real)

14. Verifique la identidad trigonométrica del coseno de la suma y resta de ángulos mediante la fórmula de Euler. **Ayuda:** obtenga la parte real de $\exp(ix)\exp(\pm iy)$. ¿Cómo puede obtener la identidad correspondiente al seno?

15. Use la fórmula de Euler para hallar la raíz cuadrada de i (escrita mediante sus partes real e imaginaria).