

Parámetros de ondas viajeras

1. Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de ondas clásica unidimensional. Grafique las funciones dadas.

a) $\psi(x, t) = Ae^{-\lambda(x-vt)^2}$

b) $\psi(x, t) = \beta(x + vt)$

c) $\psi(x, t) = A \sin[k(x - vt)]$

d) $\psi(x, t) = B \sin^2(kx - \omega t)$

e) $\psi(x, t) = C \cos(kx) \sin(\omega t)$

f) $\psi(x, t) = De^{i(kx - \omega t)}$

2. Una onda se propaga en una cuerda produciendo una oscilación transversal dada por:

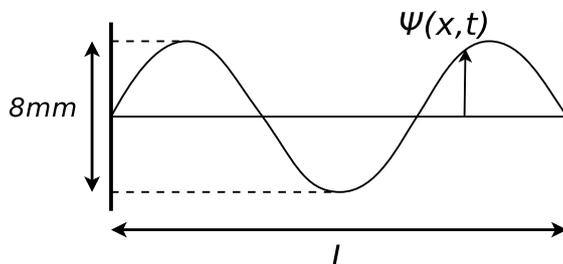
$$\psi(x, t) = 0.1 \text{ m sen}(\pi \text{ m}^{-1}x - 4\pi \text{ s}^{-1}t)$$

Determine:

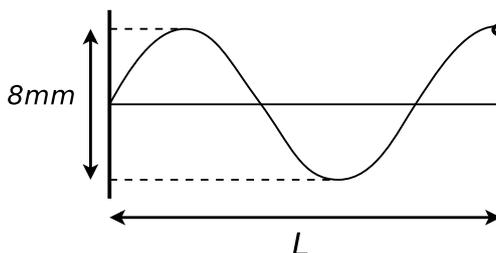
- a) la amplitud de la onda;
 - b) su frecuencia de oscilación;
 - c) su velocidad de propagación;
 - d) el desplazamiento, velocidad y aceleración del segmento de cuerda ubicado en $x = 2 \text{ m}$ en el tiempo $t = 1 \text{ s}$.
3. Considere una onda transversal que se propaga a lo largo de la dirección x , con frecuencia angular $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$ y número de onda $k = 100 \text{ m}^{-1}$. En $x_1 = 1 \text{ km}$ y $t_1 = 1 \text{ s}$ la fase de la onda es $\phi = \frac{3\pi}{2}$.
 - a) ¿Cuál es la fase en la posición x_1 para tiempo $t = 0$?
 - b) Considerando que $\phi(x, t) = kx - \omega t + \phi_0$, ¿cuánto vale ϕ_0 ?
 - c) ¿A qué velocidad se propaga la onda?
 - d) ¿Cuánto tiempo tarda un frente de onda para viajar desde x_1 hacia $x_2 = 2x_1$?
 4. Una cuerda de densidad lineal $\mu = 0.005 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ se tensa con una fuerza de 0.25 N . Un extremo de la cuerda se desplaza transversalmente (mediante la aplicación de una fuerza externa), siendo la distancia entre los desplazamientos extremos igual a 0.4 m , y el tiempo que tarda en recorrer dicha distancia igual a 0.25 s . Encontrar:
 - a) La velocidad de la onda generada en la cuerda, su frecuencia y su longitud de onda.
 - b) La expresión matemática para el desplazamiento $\psi(x, t)$.
 - c) La energía cinética media por unidad de longitud, para una partícula del medio.
 - d) La energía potencial media por unidad de longitud, para la misma partícula.

Superposición de ondas viajeras

5. Una cuerda de longitud $L = 0.6\text{m}$, fija en sus dos extremos, oscila en uno de sus modos normales, tal como muestra la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. La máxima amplitud pico a pico es 8mm .



- a) Escribir $\psi(x,t)$, sabiendo que $\psi(x,0) = 0 \forall x$, y que $\dot{\psi}(L/2,0) > 0$.
- b) Hallar ondas viajeras ψ_{der} y ψ_{izq} tales que $\psi(x,t)$ sea una combinación lineal de éstas.
6. Una cuerda de longitud $L = 1\text{m}$, con un extremo fijo y uno libre, oscila en uno de sus modos normales, tal como muestra la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es $v = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. La máxima amplitud pico a pico es 8mm , siendo $\psi(L,0) > 0$.

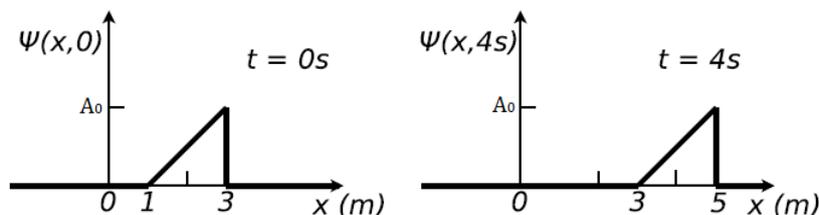


- a) Resolver, para esta situación, todo lo pedido en el problema anterior.
- b) Si ahora la cuerda está oscilando en un modo normal arbitrario n , con las mismas condiciones dadas arriba, repetir (a) (expresar en función de n).

Condiciones iniciales

Comentario: Los siguientes ejercicios pueden resolverse usando la solución de D'Alembert para la ecuación de ondas^{link}, o bien aplicando desarrollo de Fourier.

7. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad v . Se toman dos "fotografías" de la perturbación, a $t = 0\text{ s}$ y $t = 4\text{ s}$:

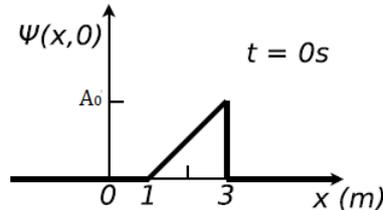


- a) ¿Cuánto vale la velocidad de propagación de la perturbación v ?

b) Halle $\psi(x, t)$.

c) Calcule la velocidad transversal.

8. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es $v = 100$ m/s (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). A $t = 0$ se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta desde el reposo.



a) Hallar $\psi(x, t) = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt)$. Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de $\psi(x, t)$.

b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

9. Se tiene una cuerda homogénea de longitud L y densidad μ , a una tensión T , con sus dos extremos fijos ($x = 0$ y $x = L$). A $t = 0$ se la perturba de forma tal que:

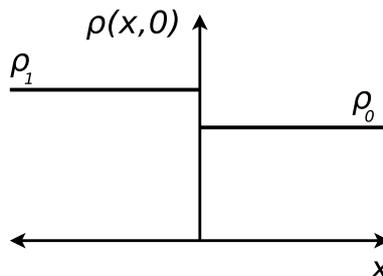
$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ h \frac{x-a}{L/2-a} & \text{si } a < x < L/2 \\ h \frac{L-a-x}{L/2-a} & \text{si } L/2 < x < L-a \\ 0 & \text{si } L-a < x < L. \end{cases}$$

Se suelta la cuerda desde el reposo; considerar $h \ll L$.

a) Hallar $\psi(x, t)$ y demostrar que siempre es posible escribir esta solución como una superposición de una onda que se propaga hacia la derecha y una que se propaga hacia la izquierda.

b) Hacer un esquema cualitativo del movimiento de la cuerda para los instantes $t_n = n \frac{L}{8v}$, donde v es la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y n es un número natural.

10. En un gas, a $t = 0$, se produce la perturbación indicada en la figura. Sabiendo que $\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_0} \ll 1$ y que el sistema parte del reposo (es decir, $\dot{\psi}(x, 0) = 0$), calcule $\rho(x, t)$.



Sugerencia: Puede comenzar planteando condiciones de contorno apropiadas en $x = \pm L$ para luego pedir que $L \rightarrow \infty$. ¿Cómo se modifica el desarrollo de la condición inicial en una serie de modos normales al hacer esto? **Ayuda:** Tenga en cuenta la relación de dispersión.

Datos: ρ_1 , ρ_0 , v_s (velocidad de propagación de las ondas en el gas, a.k.a., *velocidad del sonido*).

Fuentes en movimiento (optativos)

11. **Efecto Doppler:** Una fuente de sonido que emite en una frecuencia de 1000 Hz se mueve hacia la derecha a 40 m/s. Un observador, que está a la derecha de la fuente, también se mueve hacia la derecha a 20 m/s.
 - a) ¿Cuál será la frecuencia detectada por el observador? El aire se encuentra en reposo.
 - b) Repita el punto anterior si hay viento hacia la derecha a 20 m/s.
 - c) Repita todo lo hecho si el observador se encuentra inicialmente a la izquierda de la fuente.

12. **Ondas de choque:** Un avión a retropropulsión en vuelo horizontal a 5000 m de altura pasa sobre un observador con velocidad 2.2 Mach (o sea, 2.2 veces la velocidad del sonido). Calcular:
 - a) El ángulo formado por el frente de la onda sonora y la dirección del movimiento.
 - b) ¿Cuánto tiempo después de haber pasado el avión sobre el observador la onda llega a éste?
 - c) Si el piloto hace sonar una bocina en el instante en que pasa justo sobre el observador, ¿cuánto tiempo después escucha el observador ese sonido?