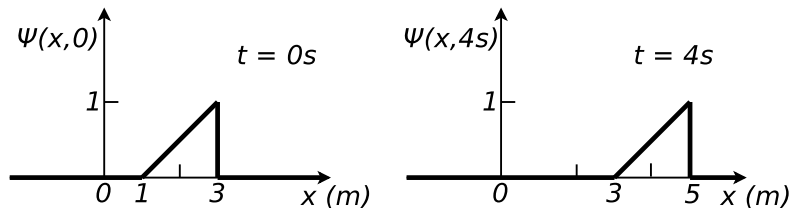


GUÍA 2: PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS CONTINUOS

1. Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.

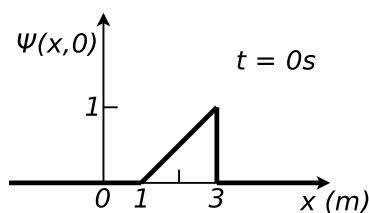
- $\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda(x-vt)^2}$
- $\Psi(x, t) = \beta(x + vt)$
- $\Psi(x, t) = A \sin[k(x - vt)]$
- $\Psi(x, t) = B \sin^2(kx - \omega t)$
- $\Psi(x, t) = C \cos(kx) \sin(\omega t)$
- $\Psi(x, t) = De^{i(kx - \omega t)}$

2. Se tiene una perturbación que se propaga en una cuerda infinita con velocidad  $v$ . Se toman dos “fotografías” de la perturbación, a  $t = 0$  s y  $t = 4$  s:



- a) Hallar  $v$ .
- b) Hallar  $\Psi(x, t)$ .

3. Se tiene una cuerda infinita. Se sabe que la velocidad de propagación de las ondas en ella es  $v = 100$  m/s (consideramos que dicha cuerda es un medio no dispersivo). A  $t = 0$  se la deforma de la manera que se indica en la figura, y se la suelta (desde el reposo).



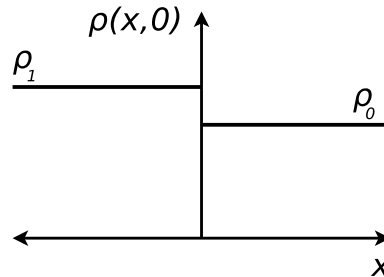
- a) Hallar  $\Psi(x, t) = \Psi_1(x - vt) + \Psi_2(x + vt)$ . Dar explícitamente (en cada intervalo de interés) la expresión de  $\Psi(x, t)$ .
- b) Comparar esta situación con la del problema anterior.

4. Se tiene una cuerda homogénea de longitud  $L$  y densidad  $\mu$ , a una tensión  $T$ , con sus dos extremos fijos ( $x = 0$  y  $x = L$ ). A  $t = 0$  se la perturba de forma tal que

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ h \frac{x-a}{L/2-a} & \text{si } a < x < L/2 \\ h \frac{L-a-x}{L/2-a} & \text{si } L/2 < x < L-a \\ 0 & \text{si } L-a < x < L. \end{cases}$$

Se suelta la cuerda desde el reposo; considerar  $h \ll L$ .

- a) Hallar  $\Psi(x, t)$  y demostrar que siempre es posible escribir esta solución como una superposición de una onda que se propaga hacia la derecha y una que se propaga hacia la izquierda.
- b) Hacer un esquema cualitativo del movimiento de la cuerda para los instantes  $t_n = n \frac{L}{8v}$ , donde  $v$  es la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda y  $n$  es un número natural.
5. En un gas, a  $t = 0$ , se produce la perturbación indicada en la figura. Sabiendo que  $(\rho_1 - \rho_0)/\rho_0 \ll 1$  y que  $v(x, 0) = 0$ , calcule  $\rho(x, t)$ .

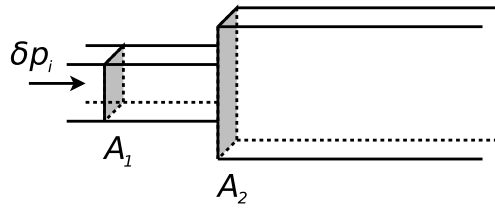


**Datos:**  $\rho_1, \rho_0, v_s$  (velocidad de propagación de las ondas en el gas).

6. La ecuación de una onda transversal en una cuerda está dada por:  $y(x, t) = 0,1 \text{ m} \sin [\pi (x \text{ m}^{-1} - 4 \text{ s}^{-1} t)]$  ( $x$  e  $y$  en metros y  $t$  en segundos). Determine:
- La amplitud de la onda.
  - La frecuencia de vibración de la cuerda.
  - La velocidad de propagación de la onda.
  - En  $t = 1 \text{ s}$ , evaluar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un segmento pequeño de cuerda ubicado en  $x = 2 \text{ m}$ .
7. Sea una onda transversal plana y armónica, cuya frecuencia angular vale  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$  y cuyo número de onda es  $k = 100 \text{ m}^{-1}$ . En  $x_1 = 1 \text{ km}$  y  $t_1 = 1 \text{ s}$  la fase de la onda es  $v(1 \text{ km}, 1 \text{ s}) = 3\pi/2$ .
- ¿Cuánto vale la fase en  $x_1$  para  $t = 0 \text{ s}$ ?
  - Considerando que  $v(x, t) = kx - \omega t + v_0$ , ¿cuánto vale  $v_0$ ?
  - ¿A qué velocidad se propaga la onda?
  - ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el frente de onda que se hallaba en  $x_1$  llegue a  $x = 2x_1$ ?
8. Una cuerda larga con  $\mu = 0,005 \text{ kg/m}$  se tensa aplicando una fuerza de  $0,25 \text{ N}$ . El extremo izquierdo se mueve hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple de período  $0,5 \text{ s}$  y amplitud  $0,2 \text{ m}$ ; se supone que la tensión permanece constante en todo el movimiento. Encontrar:
- La velocidad de la onda generada en la cuerda, la frecuencia y la longitud de onda.
  - La expresión matemática para el desplazamiento:  $y(x, t)$ .
  - La energía cinética media por unidad de longitud, de una partícula del medio.
  - La energía potencial media por unidad de longitud, de una partícula.
9. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas, de densidades lineales  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión  $T$ . Sobre la primera cuerda (la de densidad  $\rho_1$ ) incide una onda de la forma:  $\phi_i(x, t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$ . Se conocen:  $\rho_1, \rho_2, T, \omega$  y  $A_i$ .
- Calcule  $k_1$  y  $k_2$ , es decir, los números de onda de cada lado de la unión.
  - Plantee la solución más general para  $\phi(x, t)$  de cada lado de la unión.
  - ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?

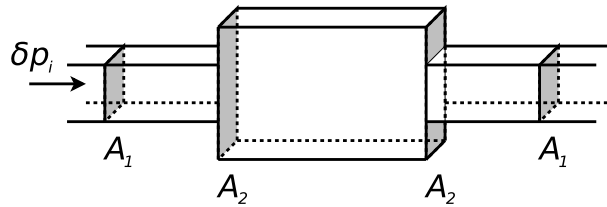
d) Usando (b) y (c), calcule la perturbación  $\phi(x,t)$  en cada una de las cuerdas.

10. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma  $\delta p_i(x,t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$  incide desde el primer caño hacia  $x > 0$ . Hallar las amplitudes de presión y elongación de las ondas reflejadas y transmitidas.



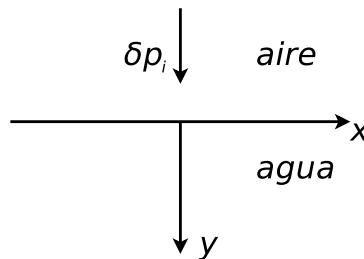
**Datos:**  $A_1, A_2$ , presión media  $P_0$ , densidad media  $\rho_0$ ,  $v_s$ ,  $\omega$ ,  $A_i$ . Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.

11. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar  $\delta p(x,t)$  y  $\Psi(x,t)$  en cada tramo.

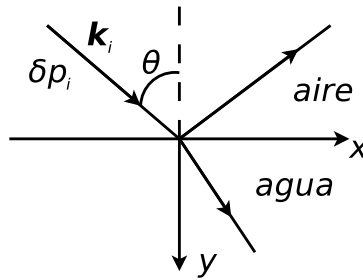
12. Se tiene una interfase plana e infinita entre aire y agua (ver figura).



Desde el aire incide una onda acústica plana cuya dirección de propagación es normal a la interfase; se escribe  $\delta p_i(y,t) = A_i \cos(k_1 y - \omega t)$ . Hallar las ondas reflejadas y transmitidas  $\delta p_r(y,t)$  y  $\delta p_t(y,t)$ .

- 13.

- Demuestre que la función:  $\Psi(\mathbf{r},t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t)}$ , con  $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$  un vector constante y  $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , es solución de la ecuación de ondas tridimensional. Sugerencia: exprese el laplaciano en coordenadas cartesianas.
- Analice el significado físico de  $\Psi(\mathbf{r},t)$ . ¿Cómo son los frentes de onda? ¿Cuál es la relación entre el vector  $\mathbf{k}$  y los frentes de onda? ¿Hacia dónde se desplazan los frentes de onda al transcurrir  $t$ ? ¿A qué velocidad?
- Rehaga el problema anterior suponiendo que la onda incidente (desde el aire) forma un ángulo  $\theta$  con la normal a la interfase (ver figura).



Por lo tanto la onda de presión incidente se escribe, si usamos notación compleja:  $\delta p_i(\mathbf{r}, t) = A_i e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ , siendo  $\mathbf{k}_i = \frac{\omega}{v_s} (\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y})$ . Hallar las ondas reflejadas y transmitidas,  $\delta p_r(\mathbf{r}, t) = A_r e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$  y  $\delta p_t(\mathbf{r}, t) = A_t e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ .

14. En lo que sigue, encuentre con cuál de estos métodos se determina la velocidad de fase y con cuál la de grupo.

- Medir la velocidad del sonido en el aire, golpeando las manos y determinando el tiempo que transcurre entre el aplauso y el eco de un reflector ubicado a una distancia conocida.
- Medir la longitud de un tubo que resuena a una frecuencia conocida (y corregir por efectos de borde).
- Determinar la velocidad de la luz midiendo el tiempo que tarda un haz colimado en recorrer una distancia conocida.
- Encontrar la longitud de una cavidad resonante que oscila en un modo conocido a una frecuencia conocida.

15. Demuestre que la velocidad de grupo  $v_g$  y la velocidad de fase  $v_f$  están relacionadas por:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

¿Cómo es  $\frac{dv_f}{d\lambda}$  en un medio no dispersivo? En ese caso, ¿cómo se relacionan la velocidad de grupo y la de fase?

16. Se quiere investigar la relación entre el ancho de un paquete y el desfase de las frecuencias que lo componen.

- Tome el siguiente pulso con un espectro gaussiano de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  (note que las frecuencias están en fase):

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que tiene una envolvente gaussiana que modula una portadora de frecuencia  $k_0$ . Note que el pulso está centrado en  $x = 0$  y que se cumple la relación  $\Delta x \Delta k = 1/2$  (el paquete gaussiano es el de mínima incerteza).

- Ahora desfase las distintas frecuencias en forma lineal, tal que:

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\alpha(k - k_0)].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es el mismo pulso que en la parte (a), pero desplazado en  $\alpha$  hacia la derecha (una fase lineal sólo corre la función).

- Ahora agregue una fase cuadrática, es decir:

$$F(k) = A \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp [i\beta(k - k_0)^2].$$

Calcule  $f(x)$  y vea que es un pulso gaussiano centrado en  $x = 0$  pero con un ancho  $\Delta x$  que cumple:

$$\Delta x \Delta k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 16\beta^2 \Delta k^4}.$$

¿Es cierto que si se quiere disminuir el ancho de un paquete siempre se debe aumentar  $\Delta k$ ? Derive  $\Delta x$  con respecto a  $\Delta k$  de la expresión anterior y analice lo pedido.

**Ayuda:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(x+a)^2] dx = \sqrt{\pi}$ .

17. Si  $\Psi(\omega)$  corresponde a un espectro de frecuencias cuadrado, o sea  $\Psi(\omega) = 1/\Delta\omega$  para  $\omega$  comprendida en el intervalo de ancho  $\Delta\omega$  alrededor de  $\omega_0$ , y cero en otra parte; vea que  $\phi(t)$  está dada por:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sin(t\Delta\omega/2)}{t\Delta\omega/2} \right] e^{i\omega_0 t}$$

a) Grafique  $\Psi(\omega)$  y  $|\phi(t)|$ .

b) Sea  $T$  un tiempo más prolongado que la duración de cualquier experimento que pueda idear. Muestre que si  $\Delta\omega$  es suficientemente pequeño como para que  $\Delta\omega T \ll 1$ , entonces durante un tiempo menor que  $T$ ,  $\phi(t)$  es una función armónica de amplitud y fase casi constante.

18. Sea  $\phi(t)$  una función real.

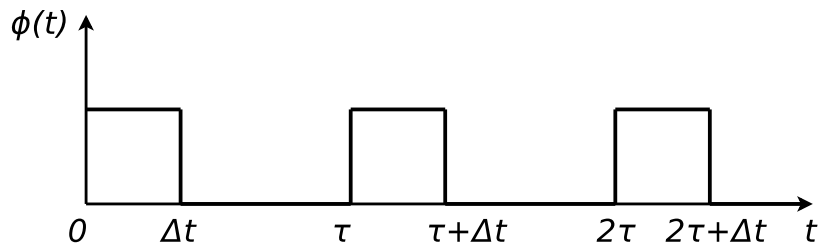
a) Muestre que su transformada de Fourier  $\Psi(\omega)$  cumple  $\Psi(\omega) = \Psi(-\omega)$ . Use esto para escribir a  $\phi(t)$  como superposición de senos y cosenos.

b) Muestre que la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  es lineal, esto quiere decir que

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$$

donde  $f$  y  $g$  son funciones de  $x$  y  $a$  y  $b$  son constantes.

c) Tomemos una pulsación que se repite  $N$  veces:



Vea que la transformada de Fourier de un único pulso situado entre  $(n\tau, n\tau + \Delta t)$  es igual a la transformada del pulso  $(0, \Delta t)$  multiplicado por la fase  $e^{in\phi}$ . Calcule entonces la transformada de la pulsación cuadrada que se repite en un tiempo largo  $T_{largo} = N\tau$ .

d) Muestre que para un valor finito de  $T_{largo}$  el análisis de Fourier de esta pulsación cuadrada repetida casi periódicamente, consiste en una superposición de armónicos casi discretos de la frecuencia fundamental  $\nu_1 = 1/T_1$ , siendo realmente cada armónico un continuo de frecuencias que se extiende sobre una banda de ancho  $\delta\nu \approx 1/T_{largo}$ . Las armónicas más importantes caen entre 0 y  $\Delta\nu = 1/\Delta t$ .

e) ¿Por qué vale  $\Delta t \Delta\nu \approx 1$  si, en principio, podría valer  $\Delta t \Delta\nu \gg 1$ ? ¿La misma pregunta es aplicable a  $\delta\nu$  y  $T_{largo}$ ?

19. Se tiene un pulso de ancho  $\Delta k$  centrado en  $k_0$  tal que la siguiente es una buena aproximación para la relación de dispersión:

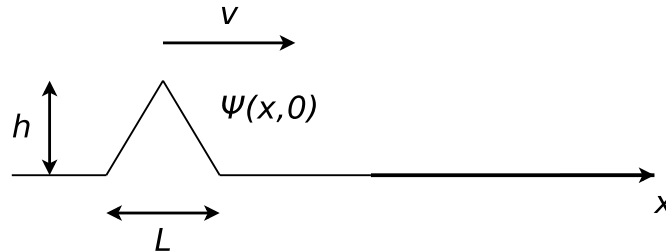
$$\omega(k) = \omega_0(k_0) + \omega'(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k - k_0)^2$$

Si en  $t = 0$  el pulso se propaga hacia  $x < 0$ , y se escribe:

$$\Psi(x, 0) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(k - k_0)^2}{4\Delta k^2} \right] \exp(ikx) dk + c.c.$$

Calcule  $\Psi(x, t)$ . Vea cuál es la posición y el ancho del paquete como función del tiempo. ¿Es cierto que al viajar por un medio dispersivo cualquier paquete se ensancha?

20. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas de distinta densidad lineal de masa,  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , unidas en un punto y sometidas a una tensión  $T$ . Sobre la primera se propaga hacia la derecha una perturbación de la forma indicada en la figura. Se conocen  $\rho_1, \rho_2, T, L$  y  $h$ . También se considera que los medios son no dispersivos.



- a) Hallar el desplazamiento  $y(x, t)$ .
- b) Explique cualitativamente como cambian estos resultados si el medio es dispersivo.
21. **Efecto Doppler.** Una fuente de sonido que emite en una frecuencia de 1000 Hz se mueve hacia la derecha a 40 m/s. Un observador, que está a la derecha de la fuente, también se mueve hacia la derecha a 20 m/s.
- a) ¿Cuál será la frecuencia detectada por el observador? El aire se encuentra en reposo.
- b) Repita el punto anterior si hay viento hacia la derecha a 20 m/s.
- c) Repita todo lo hecho si el observador se encuentra inicialmente a la izquierda de la fuente.
22. **Ondas de choque.** Un avión a retropropulsión en vuelo horizontal a 5000 m de altura pasa sobre un observador con velocidad 2,2 Mach (o sea, 2,2 veces la velocidad del sonido). Calcular:
- a) El ángulo formado por el frente de la onda sonora y la dirección del movimiento.
- b) ¿Cuánto tiempo después de haber pasado el avión sobre el observador la onda llega a éste?
- c) Si el piloto hace sonar una bocina en el instante en que pasa justo sobre el observador, ¿cuánto tiempo después escucha el observador ese sonido?