1. Redes de difracción

Considere las redes de difracción de transmisión cuyos parámetros se pueden ver en la Tabla 1. Se desea analizar una fuente luminosa cuyo espectro se supone formado por dos longitudes de onda: $\lambda_1 = 500$ nm y $\lambda_2 = 700$ nm.

1. Determine las posiciones angulares en que caerán los órdenes observables si la luz incide en forma normal a la red. ¿Cuántos órdenes espera observar para cada red y para cada longitud de onda?
2. Determine el ancho angular de cada línea observable para cada red.
3. Determine la resolución a primer y segundo orden para cada red.
4. Determine la longitud de onda más cercana que puede resolver para cada componente del espectro con cada red para los órdenes primero, segundo y máximo.
5. Repetir todo lo anterior para incidencia a 60°.

Tabla 1: Parámetros de las redes de difracción.

Red	Longitud [mm]	Dens. de líneas [mm^{-1}]	N	a [nm]	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$
A	1	500	500	2000	500	1000
B	1	1000	1000	1000	1000	2000
C	2	500	1000	2000	1000	2000
D	2	1000	2000	1000	2000	4000

Solución:

1. Para responder este ítem se utiliza la ecuación de la red:

$$\mathrm{sen}(\theta) - \mathrm{sen}(\theta_i) = m\lambda/a. \tag{1}$$

Como $\theta_i = 0$, la ecuación se reduce a $\mathrm{sen}(\theta) = m\lambda/a$. Dada una longitud de onda, cada orden observable corresponde a cada valor de m que puede satisfacer la ecuación. La limitación surge del hecho que del lado izquierdo de la ecuación hay una función seno, por lo tanto el módulo de $m\lambda/a$ no puede superar a 1. Para obtener los valores límite de m, resolvemos la ecuación:

$$\pm 1 = m_{max/min}\ \lambda/a. \tag{2}$$

Como en este caso tenemos incidencia normal, la solución es simétrica respecto al orden cero, y basta con resolver un solo caso de la ecuación; es decir, si el máximo orden observable es 10, el menor orden observable será -10. Por ejemplo, para $\lambda_1 = 500$ nm y para la red A, tendremos que resolver:

$$\pm 1 = m_{max/min}\ 500/2000 \tag{3}$$

de donde vemos que $m_{max} = 4$ y $m_{min} = -4$. Como el resultado depende de a, las redes A y C darán el mismo resultado para esta longitud de onda. La longitud de onda restante dará una menor cantidad de órdenes en cada caso, dado que es mayor que la primera. Por último, la red B dará *aproximadamente*[1] la mitad de órdenes que la red A, ya que su período espacial a es la mitad que el de las redes A y C. El resultado para la red B será válido también para la red D, ya que poseen el mismo valor de a. Todos los resultados se pueden ver en la Tabla 2.

Para determinar la posición angular, simplemente debe despejarse la Ec. 1 mediante la función arcoseno. Por ejemplo, para λ_1 a orden 2 con la red A, nos queda que:

$$\theta = \mathrm{arc\,sen}(\frac{2\ 500\,\mathrm{nm}}{2000\,\mathrm{nm}}) = \mathrm{arc\,sen}(1/2) = 30° \tag{4}$$

Los resultados se pueden observar en la Fig. 1. Esta figura muestra las líneas espectrales en función del ángulo, como se vería a ojo desnudo utizando un goniómetro. El eje vertical no indica ninguna medida, y la intensidad (omitida en el gráfico) estaría dada por el brillo de cada línea

[1] En este caso los números son redondos, pero en otros casos es necesario redondear m en dirección al cero.

2. El ancho angular de línea se define como:

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{Na\cos(\theta)} \tag{5}$$

Si despejamos para el caso mencionado al final del ítem anterior (λ_1, orden 2, red A), debemos resolver:

$$\Delta\theta = \frac{2\ 500\,\mathrm{nm}}{500\ 2000\,\mathrm{nm}\cos(30^\circ)} = \frac{1}{500\ \sqrt{3}} = 0.066^\circ \tag{6}$$

Los resultados se pueden observar en la Fig. 1. Nótese que los anchos dependen de Na, es decir, del tamaño de la red. La línea ubicada en $\theta = 30^\circ$ (correspondiente a λ_1) es un buen ejemplo de esto: las redes A y B muestran el mismo ancho, que es el doble que el mostrado por las redes C y D.

3. La resolución se obtiene a partir de la ecuación:

$$\mathcal{R}_m = mN, \tag{7}$$

donde hemos hecho explícita la dependencia de la resolución con el orden m considerado. La respuesta se obtiene fácilmente utilizando la cantidad total de líneas de cada red para los casos $m = 1$ y $m = 2$. Este parámetro no depende de la longitud de onda, ya que $\mathcal{R}_m$ es un número sin unidades que nos da el cociente entre una determinada longitud de onda y la separación que debe tener respecto a otra longitud de onda cercana para que puedan ser resueltas a un dado orden. Nos permite caracterizar al instrumento independientemente de la fuente lumínica que estemos analizando. Los resultados se pueden ver en las dos últimas columnas de la Tabla 1, y muestran que las redes B y C son equivalentes.

4. Para esto utilizamos la definición de $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{min}}. \tag{8}$$

Dada una longitud de onda y un valor de la resolución, se despeja λ_{min} fácilmente. Por ejemplo, si analizamos λ_1 mediante la red A a primer orden, debemos despejar:

$$500 = \frac{500\,\mathrm{nm}}{\Delta\lambda_{min}}, \tag{9}$$

de donde se obtiene $\Delta\lambda_{min} = 1\,\mathrm{nm}$. Esto signfica que la red A puede resolver, a primer orden, cualquier longitud de onda mayor a 501 nm o menor a 499 nm. Si en cambio analizamos λ_2, obtenemos $\Delta\lambda_{min} = 1.4\,\mathrm{nm}$. En este caso podremos resolver longitudes de onda mayores que 701.4 nm o menores que 698.6 nm.

Si consideramos el orden 2, $\Delta\lambda_{min}$ se reduce a la mitad. Esto significa que la resolución aumenta al aumentar el orden. Por supuesto se debe considerar que hay un orden máximo que puede ser observado, y que la distribución angular de la intensidad es tal que la intensidad disminuye a medida que aumenta el orden, por lo que un dado orden puede ser imperceptible dada su baja intensidad, lo cuál lo convierte en inútil independientemente de la resolución que nos permita alcanzar. En la Tabla 2 se muestran los resultados completos para $\Delta\lambda_{min}$.

5. Para pensar…

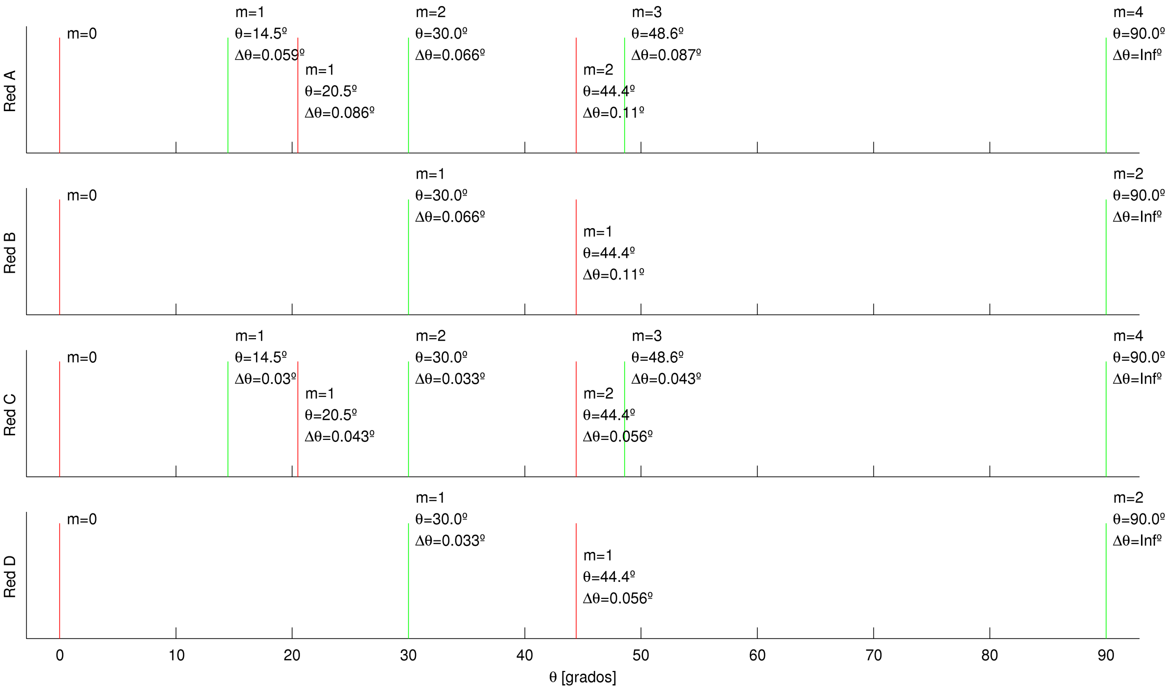

Figura 1: Órdenes positivos observados para las cuatro redes. En verde: λ_1. En rojo: λ_2. Se muestra la posición angular de cada línea y su ancho angular. Nota: no se tuvo en cuenta la intensidad relativa entre líneas.

Tabla 2: Resultados para incidencia normal.

Red	Parámetro	$\lambda_1 = 500$ nm	$\lambda_2 = 700$ nm
A	Órdenes observables	-4 a 4	-2 a 2
	$\Delta\lambda_{min}^{m=1}$	1 nm	1.4 nm
	$\Delta\lambda_{min}^{m=2}$	0.5 nm	0.7 nm
	$\text{mín}(\Delta\lambda_{min})$	0.25 nm	0.7 nm
B	Órdenes observables	-2 a 2	-1 a 1
	$\Delta\lambda_{min}^{m=1}$	0.5 nm	0.7 nm
	$\Delta\lambda_{min}^{m=2}$	0.25 nm	-
	$\text{mín}(\Delta\lambda_{min})$	0.25 nm	0.7 nm
C	Órdenes observables	-4 a 4 (ídem A)	-2 a 2 (ídem A)
	$\Delta\lambda_{min}^{m=1}$	0.5 nm	0.7 nm
	$\Delta\lambda_{min}^{m=2}$	0.25 nm	0.35 nm
	$\text{mín}(\Delta\lambda_{min})$	0.125 nm	0.35 nm
D	Órdenes observables	-2 a 2 (ídem B)	-1 a 1 (ídem B)
	$\Delta\lambda_{min}^{m=1}$	0.25 nm	0.35 nm
	$\Delta\lambda_{min}^{m=2}$	0.125 nm	-
	$\text{mín}(\Delta\lambda_{min})$	0.125 nm	0.35 nm