OSCILACIONES LIBRES Y FORZADAS

Oscilador armónico de un único grado de libertad

Los ejercicios señalados con un asterisco son adicionales.*

1. Repaso matemático: Considere la siguiente ecuación lineal diferencial de segundo grado

$$\ddot{x} + ax = 0 \tag{1}$$

Halle la solución más general posible (combinación lineal de las soluciones que halle), proponiendo como solución base:

a) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$.
b) $x(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$,
c) $x(t) = C \exp \lambda t$

¿Quién es ω? ¿y λ?

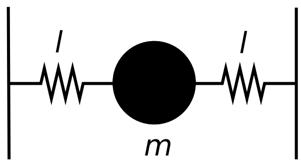
Luego, usando las siguientes relaciones (que usaremos muuuucho en la materia):

a) Relación de Euler: $\exp i\alpha = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$
b) Relaciones trigonométricas: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

demuestre que las soluciones obtenidas son equivalentes entre sí. (O dicho de otra manera, encuentre las relaciones entre A, A_1, B_1 y C)

2. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

a) Péndulo de longitud l en presencia de un campo gravitatorio de constante g. Discuta todas las aproximaciones que realiza. Demuestre que sin dichas aproximaciones la superposición lineal de dos soluciones no es solución (el sistema no es lineal).
b) Oscilaciones longitudinales de una masa m sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante k; para los dos casos:
1) longitud natural del resorte l_0 ($l_0 < l$), y
2) resorte muy elongable "slinky" ($l_0 = 0$).



c) Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior (considere ausencia de gravedad), discutiendo las diferencias entre los casos 1) y 2), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso 1) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ($l_0 < l$) o que están relajados en dicha posición ($l_0 = l$). En todos los casos discuta el significado del límite cuando la constante restitutiva tiende a cero. Compare las frecuencias de los modos longitudinales con los transversales.

3. Resuelva el resorte vertical con un peso colgado usando como cero de coordenadas la del resorte en reposo sin peso. Escriba la energía potencial (gravitatoria mas elástica) y encuentre el equilibrio. Al oscilar, ¿la energía potencial es sólo la del resorte o también oscila la potencial gravitatoria?

4. * Calcule la tensión del hilo en función del ángulo para un péndulo en pequeñas oscilaciones. Discuta la validez de la hipótesis de longitud de hilo constante. De valores de orden de magnitud razonables a los parámetros que necesite para la discusión. Discuta la validez de la aproximación g=constante.

Oscilador armónico amortiguado

5. Considere el movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante elástica $K = m\omega_0^2$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ.

   a) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = C\mathrm{e}^{-t/2\tau}\cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1. ¿De qué depende el valor de C y de θ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?

   b) Describa bajo que condiciones de Γ y ω se obtienen oscilaciones libres subamortiguadas, amortiguamiento crítico y oscilaciones sobreamortiguado. Grafique las soluciones.

   c) Demuestre que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cosh(|\omega|\,t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{senh}(|\omega|\,t)}{|\omega|}\right\}$$

   se deduce de las siguientes

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cos(\omega t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega}\right\}$$

   $$\omega = \pm i\,|\omega|\,, \quad |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

   Sugerencia: verifique primero las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\operatorname{sen}(ix) = i\operatorname{senh}(x)$; luego úselas. Considere x(0) y $\dot{x}(0)$ condiciones iniciales generales para el problema.

   d) Si ahora la condición inicial es $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = 0$. Encuentre la solución a la ecuación de movimiento y escriba cuál es la energía inicial.

6. Comenzando con la ecuación general dada en el problema anterior para oscilaciones libres sobreamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución es:

   $$x(t) = \mathrm{e}^{-\Gamma t/2}\left\{x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]t\right\}$$

   Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones subamortiguadas.

7. Verifique que si ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ también es solución. Muestre que esto también vale si la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad. ¿Vale si es un rozamiento constante?

8. Para un péndulo con fuerza de disipación proporcional a la velocidad calcule el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento y compárelo con la pérdida de energía.

Oscilador armónico forzado

9. Considere el caso subamortiguado del ejercicio 5, sobre el que ahora se realiza una fuerza dependiente del tiempo $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$

   a) Suponga que t es suficientemente grande para que la solución transitoria haya decaído a cero (solución estacionaria). Proponga la siguiente solución particular: $x_p(t) = A\operatorname{sen}(\Omega t) + B\cos(\Omega t)$. Obtenga A y B. Grafique cualitativamente A y B en función de Ω.

   b) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.

   c) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.