Otra forma de pensar las matrices

Milton Katz

29 de abril de 2020

A veces las matrices pueden ser un poco abstractas para pensar, no representan una cantidad como los escalares ni un objeto geométrico como los vectores. A medida que las vayan usando cada vez más van a poder ir desarrollando una intuición propia de qué son las matrices, yo creo que la mejor forma de pensarlas es la forma que se propone en mate 2 y en álgebra del cbc, una transformación lineal sobre un vector. Esto además de ser una forma últil de pensar qué es la matriz, es el sentido en el que casi siempre las van a usar a lo largo de la carrera. Sin embargo, a veces es necesario pensarlas de otras maneras para hacer analogías, les voy a mostrar acá otra forma de pensar la matriz y que tiene de bueno que permite pensar la matriz como un objeto geométrico y no como algo que aplica sobre un objeto geométrico.

La pregunta disparadora de esto fue qué significa que dos matrices se diagonalicen en la misma base que es una de las tantas preguntas que si pensamos en transformaciones no se me ocurre (a mi) como responderla de una manera intuitiva y con los dedos.

Vamos a hablar de secciones cónicas, no voy a definirlas ni a sacar conclusiones sobre ellas, esto está escrito pensando en que saben lo que son y si no saben, pueden tomar dos caminos: leer en algún libro de matemática; o pensar solo en las cuatro cónicas más conocidas que son el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola que para este tema con esas alcanza y sobra. Les recomiendo que tomen el segundo camino y que si les interesa esto más adelante profundicen.

Cualquier cónica se puede escribir analíticamente de la siguiente manera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

Si nunca lo hicieron, pruben buscar cómo son las constantes para las cónicas que ya saben escribir, el circulo centrado en el origen y la parábola con eje de simetría en x son las más conocidas, pero esto también sirve para describir parábolas rotadas en cualquier ángulo, y círculos desplazados del origen, así como todas las figuras que nombre antes rotatrasladadas en cualquier dirección. También si quieren convencerse de esta ecuación pueden meterla en python (o wolfram alpha) e ir probando números que se les ocurran para las constantes y graficando.

Pero qué tiene que ver esto con las matrices? Bueno, hacia allá vamos, otra forma de escribir esta misma ecuación es

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Para chequear que efectivamente esto funciona, distribuyan y comprueben, pero básicamente tenemos acá dos vectores iguales que están representando las variables y una matriz que tiene toda la información sobre mi cónica. Esto último es clave, toda mi cónica está resumida en la matriz, los vectores no se llevan nada de información, por esto, es que a dicha matriz se le llama representación matricial de la cónica, si alguien me dice tengo esta cónica y me da la matriz, yo ya tengo todo lo que necesito para saber de que cónica me está hablando.

Mostrarles esto era todo el objetivo que tenía este texto pero ya que estamos avancemos un paso más y respondamos la pregunta que disparó esto. Qué significa que dos matrices se diagonalicen en la misma base? Para esto pensemos qué significa diagonalizar la cónica (debería decir qué significa diagonalizar la matriz que representa la cónica pero permitanme desde ahora abusar del lenguaje y llamar a esta matriz directamente la cónica). Para responder esta pregunta observemos que los términos de la diagonal son los correspondientes a x^2, y^2 y al término independiente. Si se tomaron el trabajo de pensar antes cómo tenían que ser los coeficientes de las cónicas para escribir las que ustedes ya conocían, seguramente siempre eligieron $B = D = E = 0$ salvo en la parábola que es la que mejor conocen y pueden manipular también los coeficientes lineales. Es decir, eligieron siempre cónicas ya diagonales, para ver por qué las cónicas que conocían son diagonales pensemos qué pasa con el término lineal de la parábola. Hay un término lineal siempre tuvieron que haber puesto que es D, para ser parábola necesito poder despejar y y esto solo lo puedo hacer si su coeficiente es distinto de 0, pero hay otro que es B que está multiplicado por x, una de las preguntas que nos hacían en el colegio cuando veíamos parábolas era dónde está el x vértice, que también le llamaban el eje de simetría, para la respuesta teníamos una formulita que es $\frac{-b}{2a}$, que vale cero si el coeficiente lineal (b) vale cero. Lo que hace el coficiente lineal es moverme el eje de simetría, piensen en las simetrías de las cónicas diagonales que probaron y vean que todas tienen ejes de simetría en el eje x y en el eje y. En la parábola necesito si o si romper una de las dos simetrías por eso uno de los coeficientes lineales tiene que ser distinto de 0.

Una vez entendido esto, podemos pensar en el problema de tener dos matrices y preguntarnos si se pueden diagonalizar en la misma base, haciendo analogía con las cónicas, estamos viendo si dos cónicas tienen las mismas simetrías, otra forma de pensarlo es si puedo acomodar los ejes para que las dos sean simétricas en los dos ejes. Si no están centradas en el mismo lugar seguramente no pueda, si están centradas en el mismo lugar y una es un círculo sí, si son dos elipses iguales y una está rotada respecto de la otra en un ángulo que no es múltiplo de 90^o no voy a poder. Prueben, jueguen, agarren python o cualquier herramienta para graficar e intenten ver qué pasa.