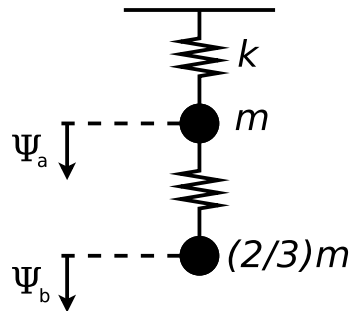
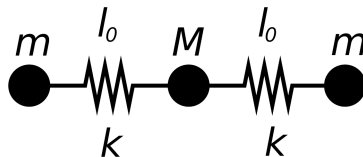


Sistemas de 2 o más grados de libertad - Modos Normales

1. Sea el sistema de la figura, en el cual ambos resortes tienen constante elástica k y longitud natural l_0 . Considere ausencia de gravedad



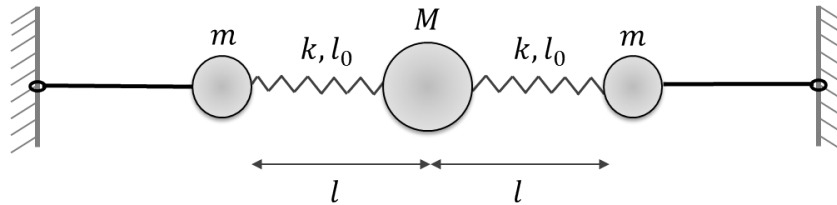
- Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
 - Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula. (Las condiciones iniciales tienen unidades arbitrarias de distancia y velocidad)
 - Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.
 - Una vez que haya resuelto el problema completo en su hoja, anímese a realizar un notebook en google Colab - Python que le permita calcular los modos normales de oscilación (para esto proporcione al código valores para los parámetros de construcción del sistema m, k, l_0 , etc). Utilice las condiciones iniciales de b) para observar en una animación el movimiento de las partículas del sistema. Estudie como variando esas condiciones iniciales puede excitar el primer o el segundo modo.
2. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0 . Analizar solamente los modos longitudinales.



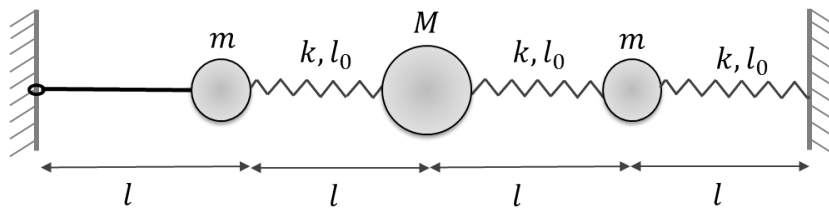
- Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa. Se recomienda plantear el problema (y todos los demás de aquí en más) a partir de las posiciones de equilibrio de cada partícula.
- Halle las frecuencias de los modos normales.
- Dibuje las configuraciones de cada modo (es decir esquematice cómo es la posición de las masas para algún instante de tiempo). Grafique el movimiento de cada masa en cada uno de los modos vibracionales mediante un código en Colab/Python.
- Si el centro de masa de la molécula se mueve con $v_o = \text{cte}$, halle la solución para $\psi_a(t)$, $\psi_b(t)$ y $\psi_c(t)$.
- Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

f) Si se aplica a una de las masas una fuerza armónica, ¿a cuál conviene aplicarla para excitar más eficientemente el modo de mayor frecuencia?

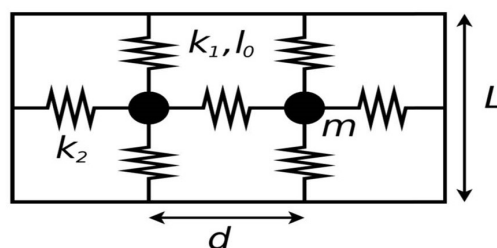
3. Considere las oscilaciones transversales del problema anterior. Para su mejor comprensión puede imaginarlo como el esquema de la figura, en el cual las masas de los extremos pueden subir/bajar pero solidarios a la barra enhebrada a los vástagos laterales.



- Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas. ¿Qué diferencias hay entre la ecuación de movimiento para resortes slinky y resortes con $l_0 \neq 0$ en la aprox. de pequeñas oscilaciones? Nota: utilice lo aprendido en la guía de repaso.
- Halle las frecuencias de los modos normales.
- Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal. Determine los desplazamientos de cada masa como función del tiempo (solución más general posible para cada masa).
- ¿Qué condiciones iniciales que permiten excitar sólo el segundo modo?
- Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿qué modos se observan?
- ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared como se indica en la figura a continuación?



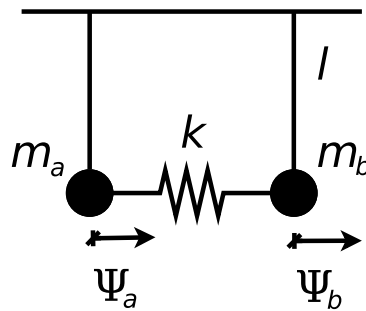
4. Considere el sistema de la figura, en el que se tienen dos partículas de masa m unidas a las paredes con resortes verticales de longitud natural l_0 ($l_0 < L/2$) y constante k_1 , y con resortes horizontales $l_0 = 0$ (slinkies) y constante k_2 . Imagine que las partículas tienen la libertad de moverse en el plano y que el sistema es en ausencia de gravedad.



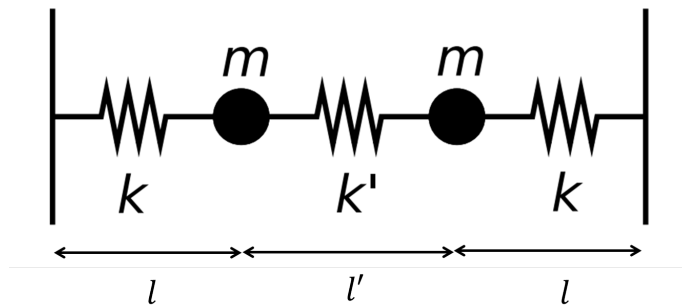
- ¿Bajo qué aproximaciones es posible decir que el movimiento más general posible de cada una de las masas es una superposición lineal del movimiento más general posible de las oscilaciones longitudinales y de las oscilaciones transversales? Demuestre su afirmación.
- Considerando la aproximación del punto anterior, determine las frecuencias propias y los modos normales de oscilación: longitudinales, transversales y de la solución más general posible para un movimiento arbitrario en el plano.
- Si quisiera resolver el mismo problema con 5 partículas en vez de 2, la resolución de la matriz para hallar las frecuencias de oscilación ^amano sería un tanto engorrosa. Plantee el problema para las 5 partículas en un notebook de Colab-Python y observe como el cálculo numérico le permite hallar con facilidad los modos de oscilación.

Batidos y Pulsaciones

5. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b , acoplados mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0 .



- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es slinky?.
 - Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
 - Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$; obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo. *Nota: probablemente halle muy cómodo graficar sus resultados utilizando el Colab-Python. Aproveche y varíe parámetros que le permitan comprender mejor cómo es el acoplamiento en función de los parámetros de interés*
 - Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b , donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.
6. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k' , tal que todos tienen longitud natural l_0 y en posiciones de equilibrio l, l' y l como indica la figura.



- Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema (considere pequeñas oscilaciones).
- ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Sistemas forzados - Coordenadas Normales

7. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 5, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.
- Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y vea que si no considera las condiciones $m_a = m_b = m$ o $F_{rozi} = \hat{\gamma} m_i \dot{\psi}_i$ con $i = a, b$, las ecuaciones no se desacoplan utilizando las coordenadas normales del sistema.

- Considere entonces $m_a = m_b = m$, resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b.
- Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.
- Muestre que despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

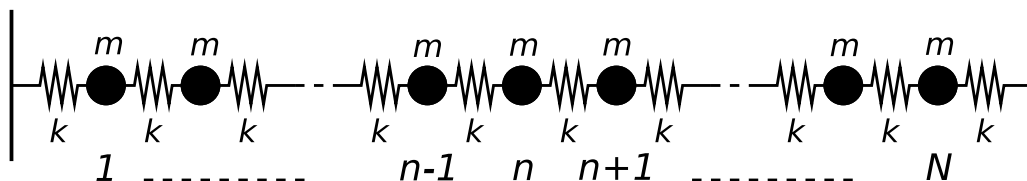
- Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no. *Nota: ayúdese para graficar con el Colab-Python*

8. Considere el sistema del problema 6, pero en este caso considere las oscilaciones longitudinales.

- Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante del tipo $f(t) = f_0 \cos(\Omega t)$ ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido de frecuencias?
- *Repita el punto anterior, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad
- * Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema

Modos normales en sistemas periódicos

9. Considere el sistema de N masas separadas una distancia a y unidas a resortes de constante elástica k y longitud natural l_0 mostrado en la figura.



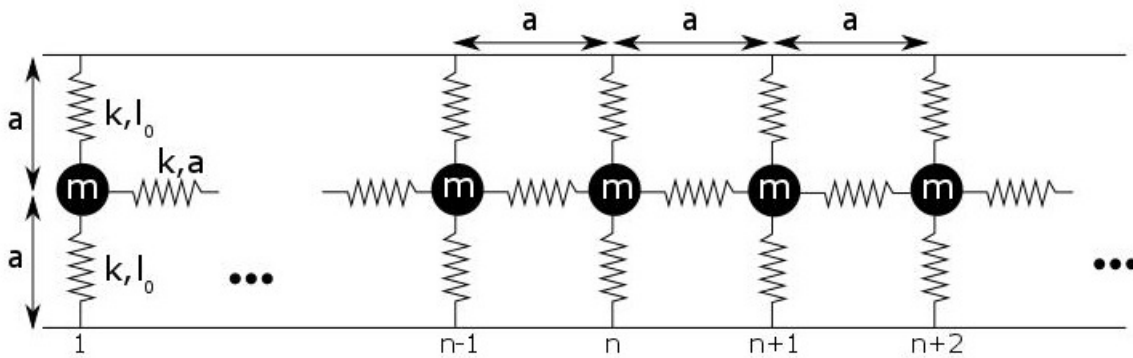
- Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula n -ésima.
- Proponga una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos \left(nk^{(p)}a + \alpha^{(p)} \right) \cos \left(\omega^{(p)}t + \phi^{(p)} \right)$$

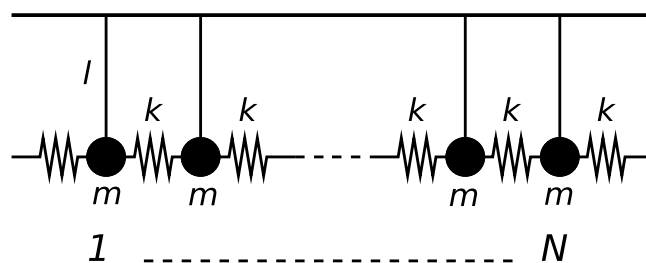
Halle la relación de dispersión y gráfiquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

- Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están fijos y escriba la solución general para la masa n -ésima.
- Ídem. anterior, pero cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un “extremo libre” en esta configuración?)
- *Ídem. anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.
- Particularice los resultados de 9c, 9d y 9e anteriores para el caso en que $N = 3$.

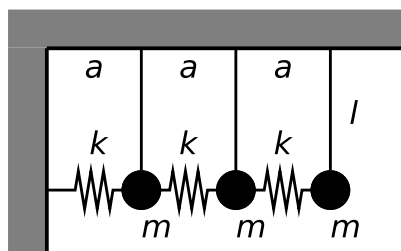
10. En el sistema de la figura hay N partículas de masa m alineadas a una distancia a . Las mismas están sujetas a las paredes mediante resortes de constante k y longitud natural l_0 . A su vez, están vinculadas mediante resortes de constante k y longitud natural a ($l_0 < a$). Hay movimiento sólo en la **dirección horizontal**.



- Escriba la ecuación de movimiento para la partícula n -ésima. Indique todas las aproximaciones que realiza.
 - Proponga una solución adecuada y halle la relación de dispersión. ¿Cuál es la frecuencia más baja posible?
 - Imponga las condiciones de contorno apropiadas para el sistema y calcule las frecuencias propias del mismo. Escriba la solución para el movimiento de cada partícula.
 - Particularice para el caso $N=2$ y compare con el resultado que obtiene resolviendo el problema "matricialmente". Esquematice los modos normales de oscilación.
11. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura. Donde todos los resortes tienen la misma longitud natural l_0



- Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 9 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?
- Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.
- Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.
- Especifique el problema c) para 3 péndulos como se muestra en la figura.



- e) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Utilizando los modos normales para el sistema sin forzar, halle la solución estacionaria del problema forzado (considere el problema sin amortiguamiento-utilice lo aprendido en la guía anterior). ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

Modos normales de una cuerda

12. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0 . Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión: $\Psi(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$. Tome el sistema de coordenadas con $x = 0$ en un extremo de la cuerda y $x = L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:
- $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$ (ambos extremos están fijos).
 - $\Psi(0, t) = 0$ y $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre “libre” es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo “libre” para la cuerda?
 - $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?
 - Ahora tome un sistema de coordenadas con $x = 0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2, t) = \Psi(L/2, t) = 0$ (ambos extremos fijos).
13. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?
14. Las cuatro cuerdas de un violín, considere que todas son de igual longitud, emiten en su modo fundamental las notas: sol₂ (198/s); re₃ (297/s); la₃ (440/s) y mi₄ (660/s). La primera cuerda es de aluminio ($\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$ y diámetro $d_1 = 0,09 \text{ cm}$); las dos siguientes son de otro material ($\rho = 1,2 \text{ g/cm}^3$) y diámetros $d_2 = 0,12 \text{ cm}$ y $d_3 = 0,1 \text{ cm}$, y la cuarta es de acero ($\rho = 7,5 \text{ g/cm}^3$) y diámetro $d_4 = 0,1 \text{ cm}$. Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.
15. Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es lanzada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia. Considere que parte del reposo.
- a) Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.
 - b) ¿Con qué período se repite el movimiento?
 - c) Gráfiquelo para cuatro instantes equispaciados dentro de un período.

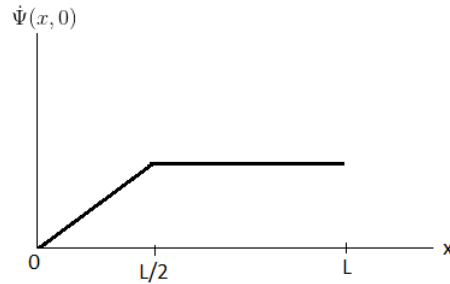
Serie de Fourier: condiciones iniciales en cuerdas

† En todos los problemas de condiciones iniciales puede ver de recuperar la forma de la cuerda a $t = 0$ en Colab/Python estudiando en cada caso el número de términos necesarios de la serie correspondiente. También puede dejar que el tiempo evolucione y observar a la cuerda oscilar animando el movimiento de la cuerda.

16. Considere una cuerda de longitud L , de densidad de masa uniforme μ_0 sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0 . A $t = 0$ la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función: $\Psi(x, 0) = H(x) = \sin(\pi x/L) + (1/3)\sin(3\pi x/L) + (1/5)\sin(5\pi x/L)$, si se toma un sistema de coordenadas tiene $x = 0$ en un extremo de la soga y $x = L$ en el otro.
- a) Halle $\Psi(x, t)$.
 - b) Grafique $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi/5, \pi/3$ y $\pi/2$. ¿Qué clase de simetría tiene $\Psi(x, t)$ alrededor de $\omega_1 t = \pi/2$? ¿y alrededor de π ? ¿Cómo espera que sea $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$? (ω_1 es la frecuencia fundamental).

17. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad de masa μ_0 sometida a una tensión T_0 . El extremo izquierdo de la cuerda está fijo y el derecho está libre.

- Escriba la expresión más general para un modo normal en la cuerda, $\psi_n(x, t)$, imponiendo las condiciones de contorno. Hallar los números de onda permitidos.
- Con lo obtenido en el inciso anterior, halle la expresión más general para una perturbación arbitraria $\Psi(x, t)$.
- A $t = 0$ se golpea la cuerda sin deformarla, imprimiéndole a cada punto una velocidad según indica la Figura. Hallar la perturbación $\Psi(x, t)$ para todo instante posterior.



18. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal μ_0 , sometida a una tensión T_0 . La cuerda tiene ambos extremos fijos.

- Escriba la expresión más general posible para un modo normal en dicha cuerda y diga cuál es la velocidad de propagación de las ondas en ella.
- Determine cuáles son las condiciones de contorno que deben satisfacerse y halle la forma general de los números de onda k_p y las correspondientes frecuencias y fases. Con esto, escriba la expresión general para una perturbación arbitraria $\Psi(x, t)$ en la cuerda.
- Sabiendo que la deformación inicial $\Psi(x, 0)$ está dada por

$$\Psi(x, 0) = \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

y considerando que inicialmente la cuerda se encuentra en reposo, calcule $\Psi(x, t)$.

19. Sea una cuerda de largo L , fija en sus extremos. A la cuerda se le impone la forma dada por la figura.

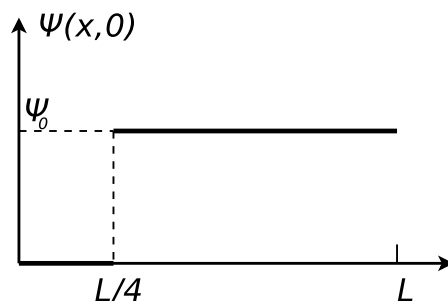
- ¿Para qué valor de L_1 se maximiza la excitación del segundo modo?
- *¿Qué cambia musicalmente al cambiar L_1 ?



20. Considere una cuerda de longitud L , de densidad de masa uniforme μ_0 sometida a una tensión T_0 , con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y a $t = 0$ se la suelta.

- Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\Psi(x, t)$.
- Graficar $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi$ y 2π .
- Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente ese sistema?

21. Considere una cuerda de longitud L , siendo T_0 su tensión y μ_0 su densidad lineal. Sea $\Phi(x, t)$ la elongación de la cuerda.



- Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.
- Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en $x = 0$ y el extremo fijo está en $x = L$, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.
- Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n .
- Si $\Phi(x, 0) = 0$ y $\dot{\Phi}(x, 0) = V_0 \cos\left(\frac{3\pi}{2L}x\right)$, siendo $0 \leq x \leq L$, obtenga la amplitud y fase de cada modo y halle $\Phi(x, t)$.

Oscilaciones longitudinales en gases en tubos unidimensionales

22. Se tiene un tubo de longitud L . Considere las siguientes posibilidades:

- Está cerrado en ambos extremos, lleno de aire en su interior.
- Tiene un extremo cerrado y el otro abierto.
- Ambos extremos están abiertos.

Datos: velocidad de propagación de las ondas v_s , L , P_0 (presión atmosférica), $\rho_0 = \gamma P_0 / v_s^2$.

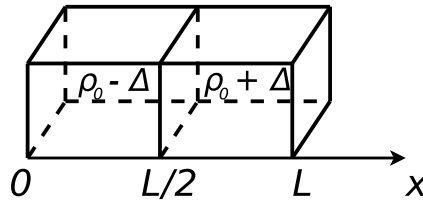
Hallar, para cada una de dichas situaciones:

- Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
 - Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\Psi(x, t)$. En dicha expresión, ¿qué parámetros conoce? ¿De qué dependen los parámetros que no conoce?
 - A partir de la expresión hallada en (b), hallar $\delta p(x, t)$ (presión en cada punto, tomando como referencia la atmosférica). ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuánto vale la amplitud de presión?
 - Hallar $\rho(x, t)$ (densidad). ¿Cuánto vale su amplitud?
23.
 - ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?
 - ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado en uno de sus extremos para que produzca el mismo tono en su primer armónico?
24. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1m. Se acerca al extremo abierto un diapasón que está vibrando con $\nu = 440$ Hz. Considere $v_s = 330$ m/s. $\omega = 2\pi\nu$
- Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
 - Repetir (a) si el tubo está abierto en ambos extremos.

Serie de Fourier: condiciones iniciales para gas en un tubo

† En estos problemas también puede recuperar la condición del gas a $t = 0$ en Colab/Python estudiando en cada caso el número de términos necesarios de la serie correspondiente. Haga evolucionar el tiempo en una animación y observe la perturbación del gas oscilar animando el movimiento del mismo.

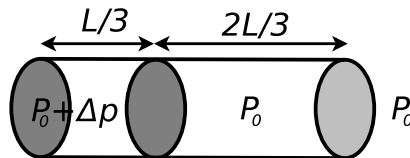
25. Se tiene un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos como se indica en la figura. El tubo presenta un tabique ubicado en la mitad del mismo. De un lado del tabique hay un gas de densidad $\rho_0 - \Delta$ y del otro lado hay un gas de densidad $\rho_0 + \Delta$ (considere $\Delta \ll \rho_0$). Todo el gas se encuentra en reposo. A $t = 0$ se quita el tabique y se deja evolucionar al sistema.



- Escriba la expresión para un modo normal $\Psi_n(x, t)$ en el tubo, imponiendo las condiciones de contorno. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas? (Ψ es el desplazamiento de los elementos del gas).
- Escriba la expresión de $\rho(x, 0)$ y de $\Psi(x, 0)$; gráfíquelas. Sugerencia: hallar $\Psi(x, 0)$ a partir de $\rho(x, 0)$ usando las condiciones de contorno.
- Usando las condiciones iniciales, halle $\Psi(x, t)$. Calcule $\rho(x, t)$.

Datos: ρ_0 , Δ , L , velocidad del sonido en el gas v_s .

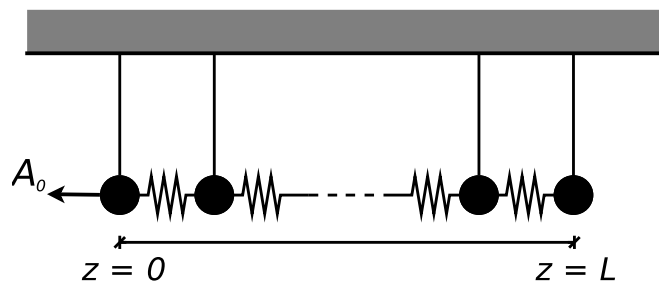
26. Se tiene un tubo dividido en dos regiones separadas por un tabique. En una de ellas se tiene una presión $P = P_0 + \Delta p$ (constante). La otra región está abierta a la atmósfera, teniendo presión P_0 . A $t = 0$ se remueve el tabique. Hallar $\delta p(x, t)$, $\Psi(x, t)$ y $\delta \rho(x, t)$.



Datos: P_0 , $\Delta p \ll P_0$, L , γ y la velocidad del sonido en el gas v_s .

Sistemas forzados en sistemas periódicos

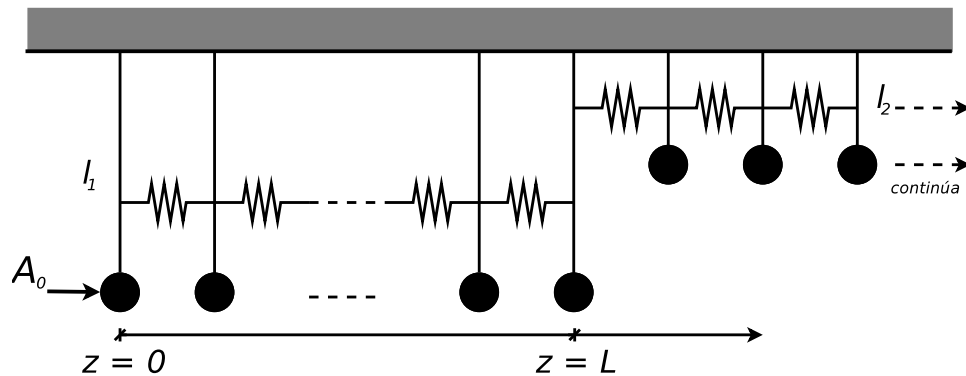
27. Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ($z = 0$), de forma tal que se conoce su amplitud $\Psi(0, t) = A_0 \cos(\Omega t)$. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las

hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

28. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura.



- Discuta cómo tiene que ser Ω para que el sistema se comporte como dispersivo en $0 < z < L$ y y reactivo en $z > L$. ¿Cuál sería la relación entre l_1 y l_2 ?
- En dichas condiciones estudie el movimiento estacionario del sistema y encuentre las frecuencias de resonancia.
- ¿Qué pasa ahora si se invierte la relación entre l_1 y l_2 ? ¿De qué variable depende el comportamiento en $z > L$?
- ¿Es posible encontrar un rango de frecuencias Ω tal que el sistema se encuentre en el mismo rango de comportamiento en $0 < z < L$ y en $z > L$?