

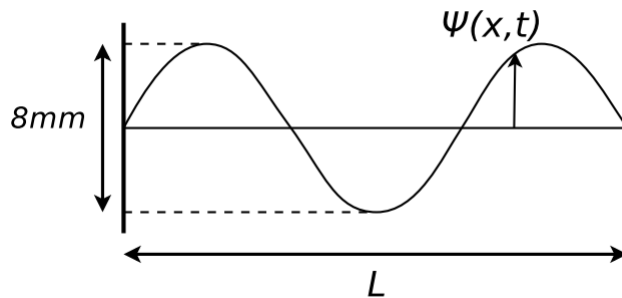
## GUÍA 2: PROPAGACIÓN DE ONDAS EN MEDIOS CONTINUOS

1. Verifique si las siguientes expresiones matemáticas cumplen la ecuación de las ondas unidimensional. Grafique las funciones dadas.

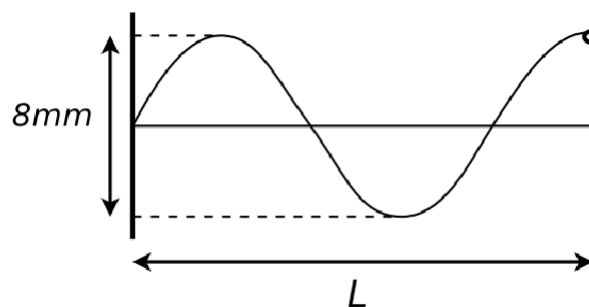
- $\Psi(x, t) = Ae^{-\lambda(x-vt)^2}$
- $\Psi(x, t) = \beta(x + vt)$
- $\Psi(x, t) = A \sin [k(x - vt)]$
- $\Psi(x, t) = B \sin^2(kx - \omega t)$
- $\Psi(x, t) = C \cos(kx) \sin(\omega t)$
- $\Psi(x, t) = De^{i(kx-\omega t)}$

### Onda estacionaria en cuerda como superposición de viajeras

2. Se tiene una cuerda de longitud  $L = 0,6$  m, fija en sus dos extremos, que se encuentra oscilando en uno de sus modos normales como se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es  $v = 80$  m/s.



- a) Escribir  $\Psi(x, t)$  (la elongación en un punto de la cuerda), sabiendo que a  $t = 0$  la elongación de todos los puntos es nula; que la amplitud total máxima de la onda es de 8 mm, y que  $\dot{\Psi}(L/2, 0) > 0$
- b) Hallar  $\Psi_1(x - vt)$  y  $\Psi_2(x + vt)$  tales que  $\Psi(x, t) = \Psi_1(x - vt) + \Psi_2(x + vt)$ , es decir: escribir a  $\Psi(x, t)$  como la superposición de dos ondas viajeras.
3. Se tiene una cuerda de longitud  $L = 1$  m, con un extremo fijo y uno libre, oscilando en el modo normal que se muestra en la figura. La velocidad de propagación de las ondas en dicha cuerda es  $v = 80$  m/s, y el desplazamiento de las partículas a  $t = 0$  es el máximo posible para este modo, siendo  $\Psi(L, 0) > 0$ . La amplitud total máxima es de 8 mm.



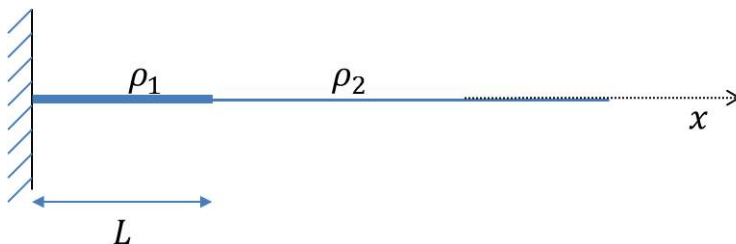
- a) Resolver, para esta situación, todo lo pedido en el problema anterior.
- b) Si ahora la cuerda está oscilando en un modo normal arbitrario  $n$ , con las mismas condiciones iniciales dadas arriba, repetir (a) (expresar en función de  $n$ ).

## Ecuación de onda

4. La ecuación de una onda transversal en una cuerda está dada por:  $y(x, t) = 0,1 \text{ m} \sin [\pi (x \text{ m}^{-1} - 4t \text{ s}^{-1})]$  ( $x$  e  $y$  en metros y  $t$  en segundos). Determine:
- La amplitud de la onda.
  - La frecuencia de vibración de la cuerda.
  - La velocidad de propagación de la onda.
  - En  $t = 1 \text{ s}$ , evaluar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un segmento pequeño de cuerda ubicado en  $x = 2 \text{ m}$ .
5. Sea una onda transversal plana y armónica, cuya frecuencia angular vale  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$  y cuyo número de onda es  $k = 100 \text{ m}^{-1}$ . En  $x_1 = 1 \text{ km}$  y  $t_1 = 1 \text{ s}$  la fase de la onda es  $\nu(1 \text{ km}, 1 \text{ s}) = 3\pi/2$ .
- ¿Cuánto vale la fase en  $x_1$  para  $t = 0 \text{ s}$ ?
  - Considerando que  $\nu(x, t) = kx - \omega t + \nu_0$ , ¿cuánto vale  $\nu_0$ ?
  - ¿A qué velocidad se propaga la onda?
  - ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el frente de onda que se hallaba en  $x_1$  llegue a  $x = 2x_1$ ?
6. Una cuerda larga con  $\mu = 0,005 \text{ kg/m}$  se tensa aplicando una fuerza de  $0,25 \text{ N}$ . El extremo izquierdo se mueve hacia arriba y hacia abajo con movimiento armónico simple de período  $0,5 \text{ s}$  y amplitud  $0,2 \text{ m}$ ; se supone que la tensión permanece constante en todo el movimiento. Encontrar:
- La velocidad de la onda generada en la cuerda, la frecuencia y la longitud de onda.
  - La expresión matemática para el desplazamiento:  $y(x, t)$ .

## Reflexión y transmisión de ondas

7. Se tienen dos cuerdas semi-infinitas, de densidades lineales  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , unidas en un punto. El sistema está sometido a una tensión  $T$ . Sobre la primera cuerda (la de densidad  $\rho_1$ ) incide una onda de la forma:  $\phi_i(x, t) = A_i \cos(\omega t - k_1 x)$ . Se conocen:  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $T$ ,  $\omega$  y  $A_i$ .
- Calcule  $k_1$  y  $k_2$ , es decir, los números de onda de cada lado de la unión.
  - Plantee la solución más general para  $\phi(x, t)$  de cada lado de la unión.
  - ¿Qué condiciones deben verificarse en el punto de unión de las cuerdas?
  - Usando (b) y (c), calcule la perturbación  $\phi(x, t)$  en cada una de las cuerdas. Determine los coeficientes de reflexión y transmisión  $R$  y  $T$ .
  - Estudie los casos  $\rho_2 \rightarrow \infty$  y  $\rho_1 \rightarrow \rho_2$ .
8. Considere el sistema de dos cuerdas de la figura. La cuerda de la izquierda, de densidad  $\rho_1$  y largo  $L$ , se encuentra fija en su extremo izquierdo a la pared, y en su extremo derecho a otra cuerda semi-infinita de densidad  $\rho_2$ . Todo el sistema se encuentra sometido a tensión  $T_0$ . Suponga que por la cuerda de densidad  $\rho_2$  incide una onda armónica de la forma  $\phi_i(x, t) = A_i e^{i(\omega t + k_2 x)}$



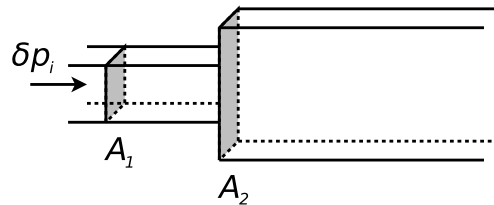
- Imponga las condiciones de contorno apropiadas y determine  $\phi(x, t)$  en cada sector de la cuerda

b) Halle los valores de  $L$  para los cuales hay un nodo de desplazamiento en la unión de las cuerdas.

9. Considere una cuerda de densidad lineal  $\mu$  sometida a una tensión  $T$ . En el centro de la cuerda, en  $x = 0$ , hay un pequeño nudo de masa  $M$ . El nudo causará que una onda incidente sea parcialmente reflejada y transmitida. Considere una onda incidente viajando en la dirección de las  $x$  positivas dada por  $\psi_i(x, t) = A_i e^{i(kx - \omega t)}$ .

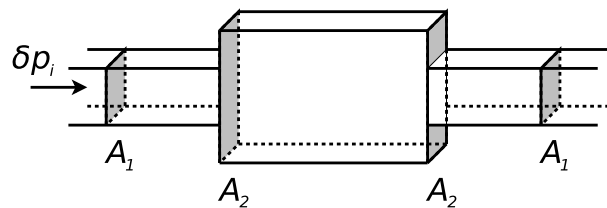
- Determine la onda  $\phi(x, t)$  a cada lado del nudo.
- Plantee adecuadamente las condiciones de empalme y demuestre que una condición le permite definir que  $A_i + A_r = A_t$  y que la otra condición implica que  $A_i - A_r = (1 + \frac{iM\omega^2}{kt})A_t$

10. Se tienen dos caños semi-infinitos de distinta sección y unidos, como se muestra en la figura. Una onda acústica de la forma  $\delta p_i(x, t) = A_i \cos(k_1 x - \omega t)$  incide desde el primer caño hacia  $x > 0$ . Hallar las amplitudes de presión y elongación de las ondas reflejadas y transmitidas.



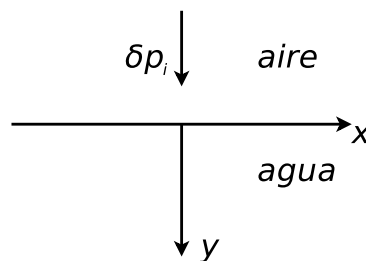
**Datos:**  $A_1$ ,  $A_2$ , presión media  $P_0$ , densidad media  $\rho_0$ ,  $v_s$ ,  $\omega$ ,  $A_i$ . Suponer despreciables los efectos de la viscosidad.

11. Considere la siguiente configuración:



Suponga que desde la izquierda incide una onda cuya expresión es la misma del problema anterior (las secciones y el resto de los datos son los mismos también). Hallar  $\delta p(x, t)$  y  $\Psi(x, t)$  en cada tramo.

12. Se tiene una interfase plana e infinita entre aire y agua (ver figura).



Desde el aire incide una onda acústica plana cuya dirección de propagación es normal a la interfase; se escribe  $\delta p_i(y, t) = A_i \cos(k_1 y - \omega t)$ . Hallar las ondas reflejadas y transmitidas  $\delta p_r(y, t)$  y  $\delta p_t(y, t)$ .

13. Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión del sonido en las siguientes interfases:

- a) Fe-Cu,
- b) Al-Pb,