Oscilador armónico amortiguado: sub, crítica y sobreamortiguado

Víctor A. Bettachini

bettachini@df.uba.ar

In [1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# %matplotlib inline
```

In [2]:
```
# constantes generales
g= 9.81 # [m/s^2]
```

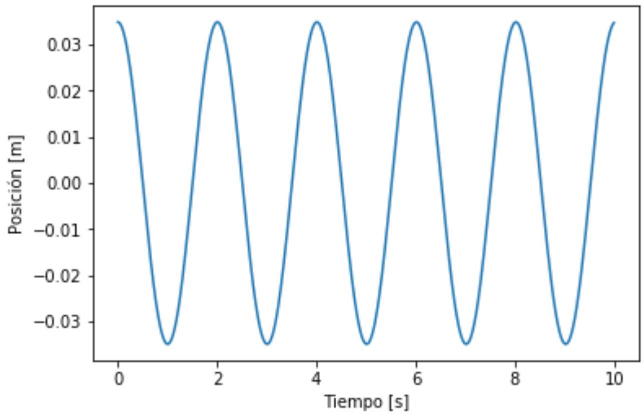
Péndulo

A efectos de presentar código Python útil para graficar la respuesta temporal de sistemas a continuación se muestra un ejmplo para la dinámica del péndulo ideal según $\psi(t) = \psi_0 \cos{(\omega t + \phi_0)}$.

La amplitud en el tiempo inicial ψ_0 se nota con la variable `pen_0`. La fase ϕ_0 como `phi_0`.

In [3]:
```
# condiciones inicales péndulo
pen_0 = 2 # [º] amplitud inicial en grados
pen_0 *= np.pi/180 # [radianes] grados -> radianes
phi_0 = 0 # [radianes] fase inicial
l = 1 #  [m] longitud de la cuerda
omega = np.sqrt(g/l) # frecuencia de oscilación
def pen(t):
    return pen_0 *np.cos(omega*t+phi_0)
```

In [4]:
```
# graficación péndulo
tempo = np.linspace(0,10,int(1E3))
outPen = pen(tempo)
plt.plot(tempo,outPen)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```



Oscilador sin resistencia

Si la posición de una masa x es la de equilibrio x_0 mas un apartamiento ψ, y la fuerza $\vec{F} = m\ddot{x}\hat{x}$ entonces $\vec{F} = m\ddot{\psi}$.

Un resorte de constante elástica k provee la fuerza, por tanto $-k\psi = m\ddot{\psi}$. De aquí se despeja $\ddot{\psi} = \omega\psi$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Propuesta la solución $\psi(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t}$ queda $(\lambda^2 + \omega^2)C\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$. Luego $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ y entonces $\psi(t) = C_1\mathrm{e}^{i\omega t} + C_1\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

Haciendo uso de la igualdad de Euler $\mathrm{e}^{\pm i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, agrupamos para obtener $\psi(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t$.

Este conjunto de constantes puede determinarse usando los datos a tiempo inicial $\psi(0) = C_1 + C_2$ y $\dot{\psi}(0) = i(C_1 - C_2)\omega$.

Por tanto

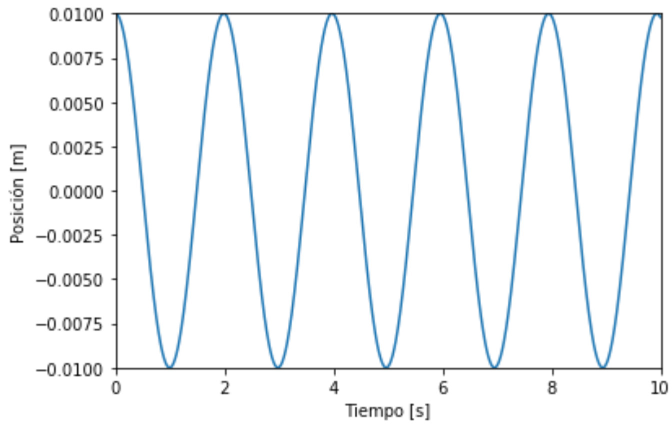
$$\psi(t) = \psi(0)\cos\omega t + \frac{\dot{\psi}(0)}{\omega}\sin\omega t.$$

Esto puede ser escrito con una fase $\phi = \arctan\left(\frac{\dot{\psi}(0)}{\omega\psi(0)}\right)$ y amplitud $U = \sqrt{\psi^2(0) + \left(\frac{\dot{\psi}(0)}{\omega}\right)^2}$, quedando

$$\psi(t) = U\cos(\omega t + \phi).$$

In [5]:
```
# condiciones oscilador
m = 1E-1 # [kg] masa oscilador
k = 1 # [N/m] constante elástica resorte
psi_0 = 1E-2 # [m] amplitud oscilación a tiempo inicial
ppsi_0 = 0E-2 # [m/s] velocidad oscilación a tiempo inicial
omega = np.sqrt(k/m)
```

In [6]:
```
# graficación oscilador
def psiOsc(t):
    return psi_0 *(np.cos(omega*t)+ (ppsi_0/omega)* np.sin(omega* t) )

tiempo = 10 # [s]
tempo = np.linspace(0,tiempo,int(1E3))
outOsc = psiOsc(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0,psi_0])
plt.plot(tempo,outOsc)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```



Oscilador amortiguado

Se agrega una fuerza opuesta y proporcional a la velocidad $-c\dot{\psi}$, así la 2.a ley queda $m\ddot{\psi} = -c\dot{\psi} - k\psi$ y entonces $\ddot{\psi} + \frac{c}{m}\dot{\psi} + \omega\psi = 0$.

Usualmente se denomina $\gamma = \frac{c}{m}$ así $\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega^2}$. De acuerdo a si el valor dentro de la raíz $\omega' = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega^2}$ es negativo, positivo o nulo se presentan distintas dinámicas.

oscilador sub amortiguado

Si el amortiguamiento es débil, $\frac{\gamma}{2} < \omega$, entonces subsiste el comportamiento oscilatorio, $\omega' = i\sqrt{\left|\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega^2\right|}$ y dinámica responde a $\psi(t) = A_1 \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos|\omega'|t + A_2 \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin|\omega'|t$.

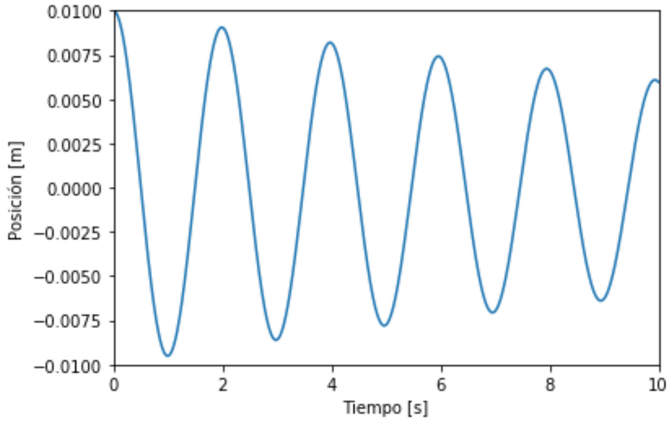
Contemplando las condiciones iniciales esta solución usualmente se escribe

$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t} \left(\psi(0) \cos\omega' t + \frac{\dot{\psi}(0) + \frac{\gamma}{2}\psi(0)}{\omega'} \sin\omega' t \right),$$

donde ω' se refiere al valor absoluto de la raíz.

In [7]:
```
# condiciones adicionales subamortiguado
c = 1E-2 # [kg/s^2]
gamma = c/m # [1/s]
omegaPrima = np.sqrt(np.abs((gamma/2)**2- omega**2))
```

In [8]:
```
# graficación subamortiguado
def psiOscSub(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cos(omegaPrima*t)+ ((ppsi_
0+ (gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sin(omegaPrima* t) )

outOscSub = psiOscSub(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0,psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSub)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```



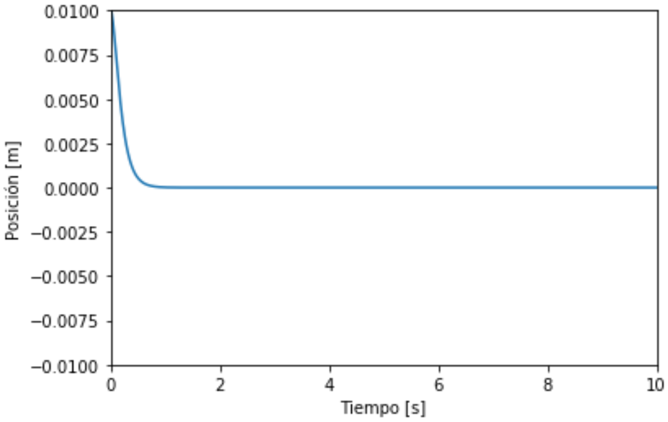
Oscilador sobre amortiguado

Si por el contrario el amortiguamiento prima sobre la oscilación, $\frac{\gamma}{2} > \omega$, los valores de ω' son reales. Basta recordar que $\mathrm{e}^{\pm\theta} = \cosh\theta \pm \sinh\theta$ para arribar a la solución,

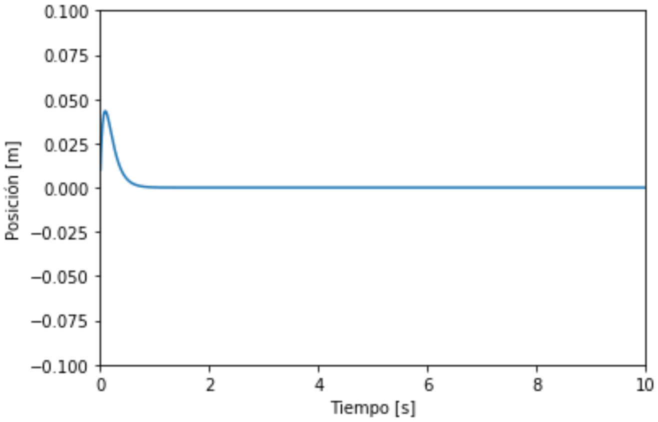
$$\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\psi(0)\cosh\omega' t + \frac{\dot{\psi}(0) + \frac{\gamma}{2}\psi(0)}{\omega'}\sinh\omega' t\right),$$

ahora con ω' real.

In [9]:
```
# condiciones adicionales subamortiguado
c = 2.1E0# [kg/s^2]
gamma = c/m # [1/s]

# graficación sobreamortiguado
def psiOscSob(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cosh(omegaPrima*t)+ ((ppsi
_0+ (gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sinh(omegaPrima* t)  )

outOscSob = psiOscSob(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0, psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSob)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```



In [10]:
```
# condiciones adicionales subamortiguado - con velocidad inicial
c = 2.1E0# [kg/s^2]
gamma = c/m # [1/s]
ppsi_0 = 1E0 # [m/s] velocidad inicial

# graficación sobreamortiguado
def psiOscSobVel(t):
    return np.exp((-gamma/2)*t)* ( psi_0 * np.cosh(omegaPrima*t)+ ((ppsi
_0+ (gamma/2)* psi_0)/omegaPrima)* np.sinh(omegaPrima* t)  )

outOscSobVel = psiOscSobVel(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-10*psi_0, 10*psi_0])
plt.plot(tempo,outOscSobVel)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```

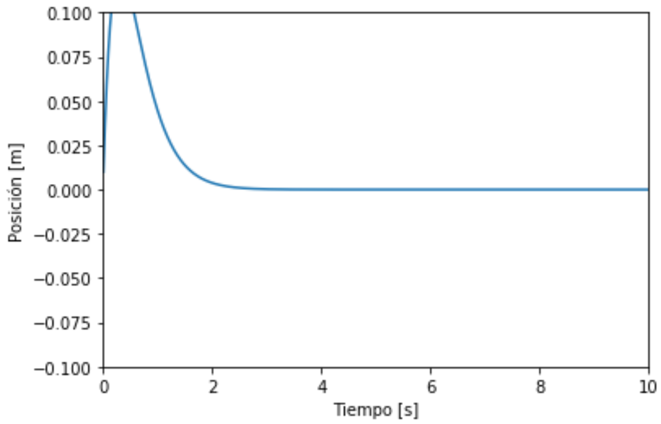


Oscilador críticamente amortiguado

El caso en que $\frac{\gamma}{2} = \omega$ hace que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega$, así $\psi(t) = (A_1 + A_2 t)\mathrm{e}^{-\omega t}$. La dinámica termina siendo dada por

$$\psi(t) = \left[\psi(0) + \left(\dot{\psi}(0) + \omega\psi(0)t\right)\right]\mathrm{e}^{-\omega t}$$

In [11]:
```
# condiciones adicionales críticamente amortiguado
gamma = 2* omega # [1/s]

# graficación sobreamortiguado
def psiOscCrit(t):
    return (psi_0+ (ppsi_0+ omega* psi_0)* t)* np.exp(-omega* t)

outOscCrit = psiOscCrit(tempo)
plt.axis([0,tiempo,-psi_0, psi_0])
plt.ylim([-0.1,0.1])
plt.plot(tempo,outOscCrit)
plt.ylabel('Posición [m]')
plt.xlabel('Tiempo [s]')
plt.show()
```



In [ ]: