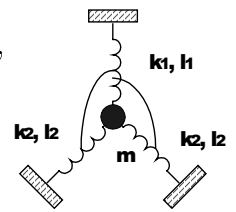
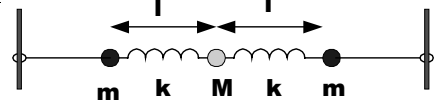
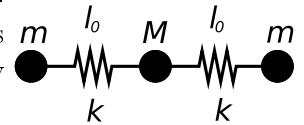
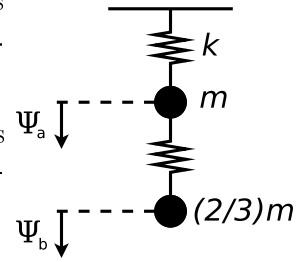


## Sistema de dos grados de libertad | Modos normales

- Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad y obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
  - Sabiendo que en  $t = 0$  el sistema satisface las siguientes condiciones  $\Psi_a(0) = 1$  y  $\Psi_b(0) = 0$  y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.
  - Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.
- Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa  $m$  están situados a ambos lados del átomo de masa  $M = 2m$  y vinculados por resortes de constante  $k$  y longitud natural  $l_0$ . Analizar sólo los modos longitudinales.

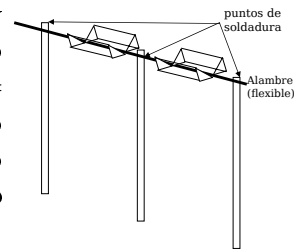
  - Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.
  - Halle las frecuencias, y dibuje las configuraciones de cada modo normal.
  - Si el centro de masa de la molécula se mueve con  $v_0 = \text{cte}$ , halle la solución para  $\Psi_a(t)$ ,  $\Psi_b(t)$  y  $\Psi_c(t)$ .
  - Establezca las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).
  - Si se aplica a una de las masas una fuerza armónica, ¿a cuál conviene aplicarla para excitar más eficientemente el modo de mayor frecuencia?
- Se analizan las oscilaciones transversales del sistema de la figura en el que las masas de los extremos pueden subir o bajar pero manteniendo horizontal la barra enhebrada en los vástagos laterales.

  - Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas.
  - Halle las frecuencias de los modos normales.
  - Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal.
  - Determine los desplazamientos en función del tiempo, de permanecer en reposo el centro de masa.
  - ¿Qué condiciones iniciales que permiten excitar sólo el segundo modo?
  - Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿qué modos se observan?
  - ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si el extremo de la derecha se fija a la pared?



### Sistemas con masas no puntuales

5. Denominamos a los ángulos en que se aparta cada barra del equilibrio  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$ . Uno de los modos de oscilación del sistema será cuando oscila como péndulo rígido, las tres coordenadas son iguales y el vector posición será  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, 1, 1)$ . Este es el modo en que oscila el centro de masa del conjunto. Otro modo es cuando un extremo oscila para un lado, el centro queda quieto y el otro extremo se mueve en sentido contrario:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, 0, -1)$ . En este caso el centro de masa no se mueve.

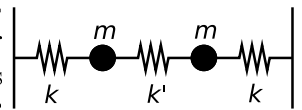


Por la simetría del problema (tres barras iguales) el tercer caso resulta de pensar cual es el movimiento de los tres cuerpos que queda que deja quieto en centro de masa, y es el del centro hacia un lado y los extremos hacia el otro la mitad de amplitud cada uno:  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha(1, -2, 1)$ .

Escriba las ecuaciones de movimiento de las tres barras acopladas en la base propuesta y demuestre que esas coordenadas quedan desacopladas.

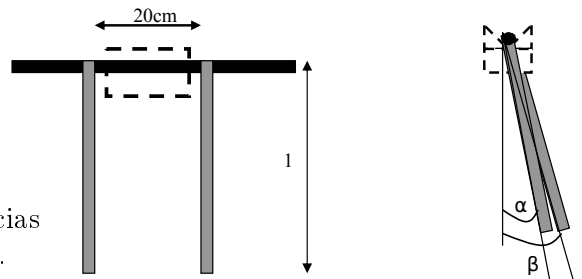
### Batidos: portadora y moduladora

6. Considere el sistema de la figura en que las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante  $k$  y unidas por otro resorte de constante  $k'$ . Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema. ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son batidos?



### Resonancia

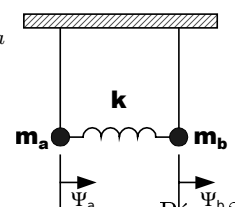
7. Considere un sistema similar al de de la figura con los extremos fijos a 20 cm de cada barra.



- Discuta cualitativamente a priori como espera que sean los modos normales, y como serán sus frecuencias comparadas con las del sistema con extremos libres.
- Resuelva el problema analíticamente, suponiendo que hay pérdidas proporcionales a la velocidad de torsión que dominan los mecanismos de pérdidas. Compare las resonancias con el caso libre.
- Si se fuerza uno de los péndulos de modo que oscile con una amplitud fija a una frecuencia fija, ¿cómo será el movimiento del otro péndulo?

### Acoplamiento débil

- Encuentre los modos normales de los osciladores acoplados en los dos casos discutidos de acoplamiento “débil” y “fuerte” y muestre solamente para el caso  $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \gg \omega_{ac}^2$  que los modos se parecen a los de los osciladores desacoplados.
- Considere el caso de las barras rígidas acopladas con el resorte de torsión presentado en el ejercicio 7 ahora con los extremos libres. Se desea asimetrizar el sistema agregándole una pesa a una de las barras. ¿Cuán grande debe ser esa pesa para que el sistema se lo pueda considerar esencialmente desacoplado.
- Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud  $l$  pero de masas diferentes  $m_a$  y  $m_b$ , acoplados mediante un resorte de constante  $k$ .



- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.

- b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.
- c) Suponiendo que el acoplamiento es débil y que las condiciones iniciales son  $\Psi_a(0) = 0$  y  $\Psi_b(0) = 1$  y nulas velocidades iniciales, obtenga el movimiento de cada masa y grafíquelo en función del tiempo.
- d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de las siguientes magnitudes  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $V_a$  y  $V_b$ , donde  $T$  indica energía cinética y  $V$  energía potencial gravitatoria. Demuestre que bajo la hipótesis de acoplamiento débil  $\langle T_a \rangle \sim \langle V_a \rangle$  ( $\langle \rangle$  =valor medio) y  $\langle T_b \rangle \sim \langle V_b \rangle$ . Grafique  $\langle E_a \rangle$  y  $\langle E_b \rangle$ , y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ( $m_a = m_b$ , y  $m_a$  muy diferente de  $m_b$ ). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.
11. Considere las oscilaciones longitudinales sistema del problema 6 teniendo en cuenta fuerzas de disipación proporcionales a la velocidad.
- a) Halle la solución estacionaria para el caso forzado en el cual se aplica sobre la masa de la izquierda una fuerza oscilante del tipo  $f(t) = f_0 \cos \omega t$  ¿Qué resonancias espera ver si realiza un barrido en frecuencia?
- b) \* Repita los puntos anteriores, teniendo en cuenta además una fuerza de disipación proporcional a la velocidad de estiramiento de los resortes.
- c) Repita el problema pero considerando las oscilaciones transversales del sistema