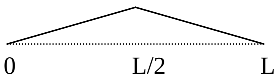
Cuerda con extremos fijos

Guia 3 (Martinez), Problema 4:

Se suelta una cuerda fija en sus extremos desde el estado inicial en reposo indicado en la figura.

- a) Calcule la evolución en el tiempo.
- b) ¿Cuál es el modo excitado de mayor amplitud?
- c) ¿Qué modos no son excitados?



La solución de la ecuación de onda para una cuerda con extremos fijos partiendo del reposo es

$$\psi(x,t) = \sum_m B_m \sin(\pi \frac{m}{L} x) \cos(\omega_m t + \phi_m)$$

Para obtener los B_m debemos "proyectar" el estado inicial $f(x)$ en la corresponiente base de Fourier $\sin{(m\frac{\pi}{L}x)}\forall m$

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1}\int_{-\frac{\lambda_1}{2}}^{\frac{\lambda_1}{2}} f(x)\sin{(m\frac{\pi}{L}x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin{(m\frac{\pi}{L}x)}\,\mathrm{d}x$$

In [1]:
```
# gráficas incluidas en el notebook
%pylab inline
# carga biblioteca cálculo simbólico
from sympy import *
# genera expresiones matemáticas "líndas"
init_printing(use_unicode=True)
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

In [2]:
```
# declara símbolos a usar como tales
x, m, L, a, H= symbols('x m L a H')
# x va de 0 a L
# m es un número natural
# H es la máxima amplitud del estado inicial
a= H/(L/2)
```

Extiendo el estado inicial $f(x)$ a lo largo de la longitud de onda del modo fundamental $\lambda_1 = 2L$ ($k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$), e.g. en $(-L, L)$.

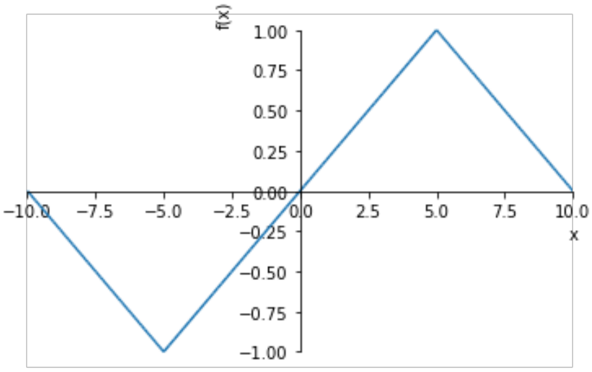
$$f_1 = -a(x+L) \qquad (-L < x < -\frac{L}{2})$$

$$f_2 = ax \qquad (-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2})$$

$$f_3 = -a(x-L) \qquad (\frac{L}{2} < x < L)$$

In [3]:
```
f1= -a* (x+ L)
f2= a*x
f3= -a* (x- L)

# Grafico la condicíon inicial con los valores H=1 L=10
f1s= f1.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, -10, -5)
f2s= f2.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, -5, 5)
f3s= f3.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, 5, 10)
# xlabel('x')
# ylabel('\psi')
plot(f1s, f2s, f3s )
```



Out[3]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x7f509eb0ff60>`

$$B_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{-\frac{L}{2}} f_1(x)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_{-\frac{-L}{2}}^{\frac{-L}{2}} f_2(x)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} f_3(x)\sin\left(m\frac{\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

In [4]:
```
# El primer término
aux= sin(m* pi* x/ L) # los elementos de la base
e1= integrate(f1* aux,(x, -L, -L/2))
simplify(e1)
```

Out[4]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{2HL}{\pi m}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{1}{\pi m}\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{1}{\pi m}\sin\left(\pi m\right)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [5]:
```
# El segundo
e2= integrate(f2* aux,(x, -L/2, L/2))
simplify(e2)
```

Out[5]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{2HL}{\pi m}\left(-\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m}\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [6]:
```
#El tercero
e3= integrate(f3* aux,(x, L/2, L))
simplify(e3)
```

Out[6]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{2HL}{\pi m}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{1}{\pi m}\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{1}{\pi m}\sin\left(\pi m\right)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [7]:
```
# Los Bm son entonces
Bm= simplify((1/L)* (e1+ e2+ e3))
Bm
```

Out[7]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{4H}{\pi^2 m^2}\left(2\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \sin(\pi m)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esto equivale a $\frac{8H}{\pi^2 m^2}$ para los m impares, siendo 0 para pares. Queda así respondido el punto c) del problema: Con la condición inicial dada no se exitan los modos pares.

La evolución temporal (punto a) del problema), si parte del reposo, es

$$\psi(x,t) = \sum_m \frac{8H}{\pi^2 m^2} \sin(\pi \frac{m}{L} x) \cos(\omega_m t)$$

Respecto al punto b) del problema, es evidente de la expresión para B_m que el modo de mayor amplitud es el del fundamental ($m = 1$).

In [8]:
```
Bm.subs([(m, 1)] )
```

Out[8]:

$$\frac{8H}{\pi^2}$$

El módulo del coeficiente B_m para el siguiente modo excitable ($m = 3$) es el siguiente es casi de un orden de magnitud menor al del modo fundamental.

In [9]:
```
Bm.subs([(m, 3)] )
```

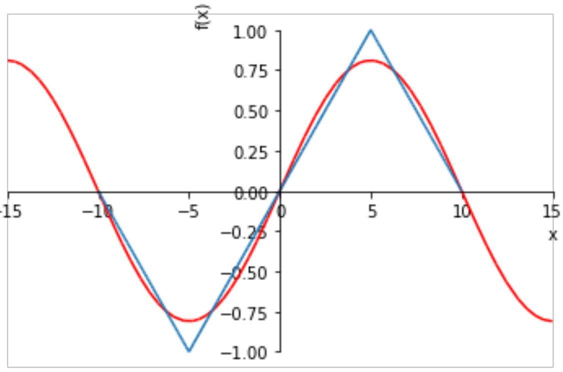
Out[9]:

$$-\frac{8H}{9\pi^2}$$

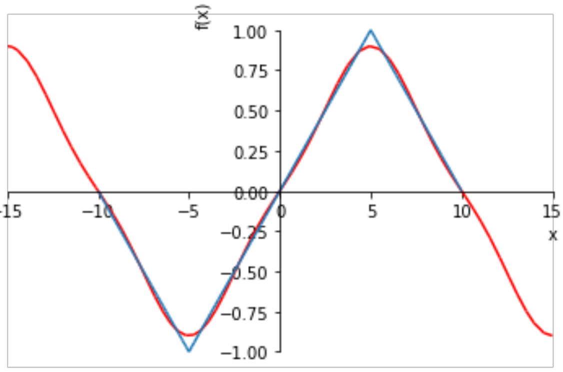
Grafico a continuación la suma de los primeros tres términos no nulos de la serie para evidenciar que se aproxima tal suma a la condición inicial.

In [10]:
```
def graficaSerie(terminos):
    qbas= (Bm*aux).subs([(H, 1), (L, 10)]) # asigno valores a A, L en te
rminos de la serie
    qout=0
    for k in range(0,terminos): # sumo terminos impares de la serie
        qout+= qbas.subs([(m,k*2+1)])
    p= plot((qout, (x, -15, 15) ), f1s, f2s, f3s, show=False)
    p[0].line_color= 'red' # la suma de la serie en rojo
    p.show()
```

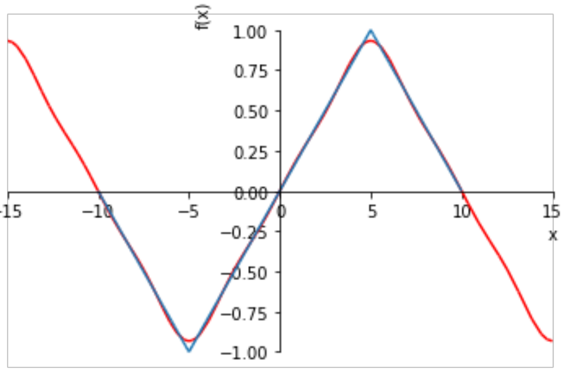
In [11]:
```
graficaSerie(1)
```



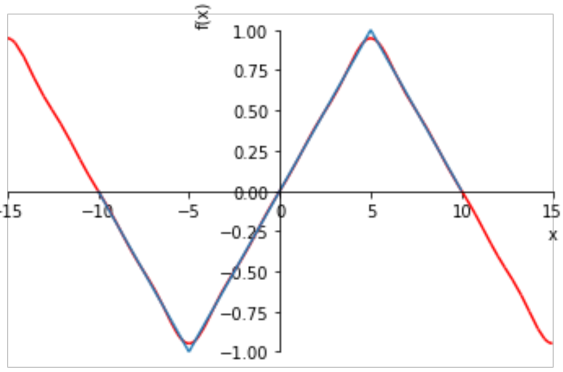
In [12]:
```
graficaSerie(2)
```



In [13]:
```
graficaSerie(3)
```



In [14]:
```
graficaSerie(4)
```



Y finalmente la suma de los 10 primeros términos es casi indistinguible de la condición inicial.

In [15]:
```
graficaSerie(10)
```