1. *a*) * ¿Cuáles de las siguientes expresiones matemáticas satisfacen la ecuación de ondas clásica?
   1) $\psi(z,t) = A\mathrm{e}^{-\lambda(ax-bt)^2}$, $\lambda \in \mathbb{N}$
   2) $\psi(z,t) = A(z+vt)$
   3) $\psi(z,t) = A\sin(az+bt)$
   4) $\psi(z,t) = A\sin\left(ax^2+bt^2\right)$

   b) Pruebe que cualquier función de la forma $f(z \pm vt)$ es solución de la ecuación de ondas clásica.

Onda portadora vs. envolvente | Velocidad de fase vs. velocidad de grupo

2. La suma de dos ondas armónicas de igual frecuencia ω que se propagan en la dirección $+z$, $A_1\cos(\omega t - kz + \varphi_1)$ y $A_2\cos(\omega t - kz + \varphi_2)$, es una del mismo tipo que puede escribirse como $A\cos(\omega t - kz + \varphi)$.

   a) Encuentre cómo están relacionados la amplitud A y fase φ de esta última con A_1, A_2, φ_1 y φ_2.

   b) Resuélvalo también en notación compleja y compare ambos resultados.

   c) Ahora calcule la superposición de dos ondas armónicas que se propagan en la dirección $+z$ de distinta frecuencia, $A_1\cos(\omega_1 t - k_1 z + \varphi_1)$ y $A_2\cos(\omega_2 t - k_2 z + \varphi_2)$. Sepárelas en una portadora a frecuencia promedio multiplicada por la envolvente. Verifique en que medida si las frecuencias son iguales o las amplitudes lo son recupera resultados anteriores.

   d) * Encuentre el módulo al cuadrado de la envolvente y muestre que evoluciona en el tiempo o en el espacio siguiendo una elipse en el plano complejo. ¿Cuáles son los valores máximos y mínimos?.

   e) * ¿Cómo se propaga la energía de esa superposición?

3. Se superponen una onda de frecuencia ω_0 de amplitud A con dos de frecuencias corridas en $\pm\Delta\omega$ y amplitud igual B.

   a) Calcule la envolvente de esta superposición en el origen.

   b) Calcule la envolvente de la onda propagada suponiendo que $\Delta\omega \ll \omega_o$. Discuta que pasa si no vale esta aproximación.

4. Calcule velocidad de fase y de grupo para la ecuación de Klein-Gordon.

5. Se encuentra a partir de un modelo[1] que las ondas superficiales en un líquido satisfacen la siguiente relación de dispersión:

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{T}{\rho}k^3\right)\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-2kh}}{1+\mathrm{e}^{-2kh}}\right],$$

   donde g es la aceleración de la gravedad, T es la tensión superficial ($\sim 7{,}2 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$ para el H_2O), ρ es la densidad del líquido y h es la profundidad.

   a) Encuentre la relación de dispersión en el límite de aguas muy profundas ($h \gg \lambda$) y en el opuesto de aguas poco profundas. Discuta en que rango de frecuencias y profundidades vale cada aproximación.

   b) Encuentre las velocidades de fase y de grupo en ambos límites.

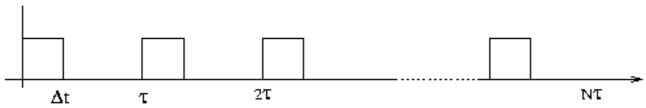
   c) Se realiza un experimento de propagación de ondas en que se golpea periódicamente la superficie del agua. Discuta que se observa en cada caso.

Desarrollo en serie de Fourier de una onda

6. Calcule los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier C_n de señales que presentan periodicidad T, pero que no son nulas en un $\Delta t \leq T$, a los fines de estimar el ancho de su espectro de frecuencias si:

[1] ver libro *Ondas* de Crawford, cap. 7

a) $T = \tau_1$ y $\Delta t = \tau_1$. *b*) $T = 10\tau_1$ y $\Delta t = \tau_1$. *c*) $T = 100\tau_1$ y $\Delta t = \tau_1$.

a) En el caso de un tren de pulsos cuadrados: 

.

b) El caso de un tren de pulsos diente de sierra: 

.

c) Calcule como cambian los C_n en si se retrasan las señales t_0.

d) * ¿Cómo cambian las señales función de agregarse a cada componente $C_n(\omega_n)$ una fase lineal con la frecuencia $\phi(\omega) = \alpha\omega$?

e) * Si analizamos las señales como moduladoras o envolventes y se las multiplica por una portadora $e^{i\omega_o t}$ (fase lineal con el tiempo),

1) ¿Cómo quedan los nuevos coeficientes de la serie de Fourier. Hacer un gráfico cualitativo.
2) Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión $\omega = ck$, hallar $\psi(t, z)$.
3) Ídem., si $\omega = ak + b$. ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

7. *a*) Hallar la función del tiempo que tiene como coeficientes de Fourier $C_n = C$ (constante) para $n = M$ hasta $M + N(M \gg N)$. Dar el valor de la frecuencia portadora. Estimar su ancho temporal.

   b) * Si dicha perturbación se propaga a derecha con una relación de dispersión $\omega = ck$, hallar $\psi(t, z)$.

   c) * Ídem., si $\omega = ak + b$. ¿A qué velocidad se propaga la portadora y a cuál la envolvente?

8. * Demuestre la igualdad $\int_0^\lambda e^{inkx} e^{-imkx} dx = \lambda\delta_{n,m}$, donde n y m son enteros distintos de cero, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker.

9. * Grafique por medio de una computadora la moduladora resultante de superponer 11 ondas de igual amplitud equiespaciadas, si la portadora se toma como la frecuencia más baja, la más alta o la media. Discuta la relevancia de las diferencias y como dependen del ancho de banda relativo (relación entre $\Delta\omega$ y $\bar{\omega}$).

