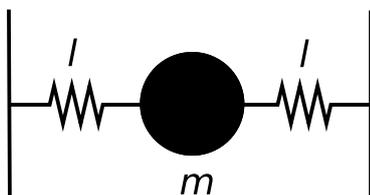


OSCILACIONES LIBRES Y FORZADAS

Oscilador armónico de un único grado de libertad

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:
 - a) Péndulo de longitud l en presencia de un campo gravitatorio de constante g . Discuta todas las aproximaciones que realiza.
 - b) Oscilaciones longitudinales de una masa m sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante k ; para los dos casos:
 - 1) longitud natural del resorte l_0 ($l_0 < l$), y
 - 2) “slinky” ($l_0 = 0$).
 - c) Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior (considere ausencia de gravedad), discutiendo las diferencias entre los casos 1) y 2), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso 1) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ($l_0 < l$) o que están relajados en dicha posición ($l_0 = l$).



Oscilador armónico amortiguado

2. Considere el movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante elástica $K = m\omega_0^2$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ .
 - a) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_h(t) = Ce^{-t/2\tau} \cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1 . ¿De qué depende el valor de C y de θ ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?
 - b) Repita el ítem anterior pero ahora proponiendo como solución una función compleja $x_h(t) = Ce^{\lambda t}$ y halle el valor de λ .
 - c) Describa bajo qué condiciones de Γ y ω se obtienen oscilaciones libres subamortiguadas, amortiguamiento crítico y oscilaciones sobreamortiguado
 - d) Demuestre que el resultado para el oscilador “sobreamortiguado” dado por

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) \cosh(|\omega| t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0) \right] \frac{\sinh(|\omega| t)}{|\omega|} \right\}$$

se deduce de las siguientes

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) \cos(\omega t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0) \right] \frac{\sen(\omega t)}{\omega} \right\}$$

$$\omega = \pm i|\omega|, \quad |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

Sugerencia: verifique primero las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\sen(ix) = i \sinh(x)$; luego úselas.

3. Comenzando con la ecuación general dada en el problema anterior para oscilaciones libres sobreamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solución es:

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2} \left\{ x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0) \right] t \right\}$$

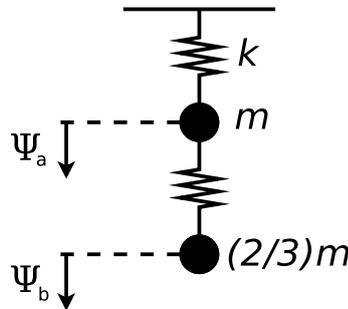
Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones subamortiguadas.

Oscilador armónico forzado

4. Considere el caso subamortiguado del ejercicio 2, sobre el que ahora se realiza una fuerza dependiente del tiempo $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$
- Suponga que t es suficientemente grande para que la solución transitoria haya decaído a cero (solución estacionaria). Proponga la siguiente solución particular: $x_p(t) = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)$. Obtenga A y B . Grafique cualitativamente A y B en función de Ω .
 - Repita el ítem anterior pero ahora proponiendo como solución particular una función compleja $x_p(t) = Ae^{i\Omega t}$. Para hacer esto, utilice la ecuación diferencial compleja con el forzado $F(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ (¿porqué es lícito esto? ¿cómo recuperaría la solución particular real a partir de la solución particular compleja obtenida?).
 - Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.
 - Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.

Sistemas de N grados de libertad

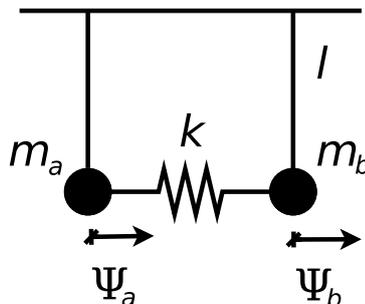
5. Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad



- Obtenga sus frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes. Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa.
- Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface las siguientes condiciones: $\Psi_a(0) = 1$, $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre el movimiento de cada partícula.
- Analice cómo se modifica el resultado por la presencia de la gravedad.

Pulsaciones entre modos normales

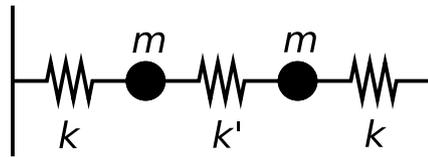
6. Considere el sistema de dos péndulos de igual longitud l pero de masas diferentes m_a y m_b , acoplados mediante un resorte de constante k y longitud natural l_0 .



- Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. considerando pequeñas oscilaciones, ¿es relevante considerar $l_0 \neq 0$? ¿Qué cambia si el resorte es slinky?
- Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Interprete el significado físico de estos modos normales.

- c) Suponiendo que el acoplamiento es débil, es decir: $k \ll \frac{g}{l} \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$, y que las condiciones iniciales son $\dot{\Psi}_a(0) = 0, \dot{\Psi}_b(0) = 0, \Psi_a(0) = 0, \Psi_b(0) = 1$; obtenga el movimiento de cada masa y gráfiquelo en función del tiempo.
- d) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de T_a y T_b , donde T indica energía cinética. Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en el gráfico como función de las diferencias entre las masas ($m_a = m_b$ y m_a muy diferente de m_b). Calcule el valor medio de la energía de interacción entre las dos partículas.

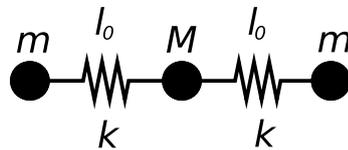
7. Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante k y unidas por otro resorte de constante k' , todos de longitud natural l_0 .



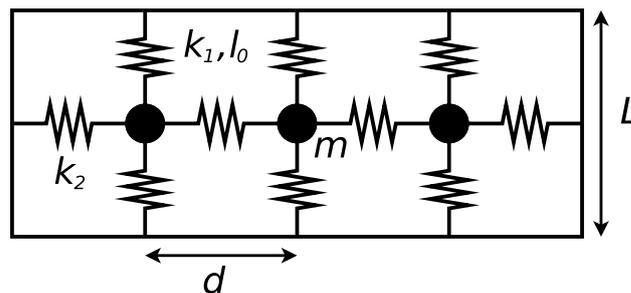
- a) Obtenga las frecuencias y los modos transversales del sistema (considere pequeñas oscilaciones).
- b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos? ¿Qué son los batidos?

Excitación selectiva de modos – Condiciones iniciales

8. Considere el sistema simplificado de la figura que se basa en una molécula triatómica simétrica. En el equilibrio dos átomos de masa m están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante k y longitud natural l_0 . Como sólo estamos interesados en analizar los modos longitudinales, supondremos que las masas se encuentran dentro de una canaleta que impide todo tipo de movimiento en la dirección transversal.



- a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.
- b) Halle las frecuencias de los modos normales.
- c) Dibuje las configuraciones de cada modo.
- d) Establezca cuáles deben ser las condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).
9. Considere el sistema de la figura, en la que los resortes verticales tienen longitud natural l_0 ($l_0 < L/2$) y constante k_1 , y los horizontales $a_0 = 0$ (“slinkies”) y k_2 .



- a) Calcule las frecuencias propias y los modos normales.

- b) Considere que las condiciones iniciales son tales que el sistema oscila horizontalmente, estando su movimiento descrito por una superposición de los dos primeros modos. Halle la energía cinética de cada masa y la energía potencial del sistema, el promedio temporal de las mismas y la frecuencia de pulsación ω_p .

Datos: $l_0, k_1, a_0 = 0, k_2, L, d, m$.

10. Considere el sistema de dos péndulos acoplados del problema 6, tal que uno de ellos es impulsado por una fuerza $F = F_0 \cos(\Omega t)$.

- a) Escriba las ecuaciones de movimiento del sistema con amortiguamiento y forzado y desacople las ecuaciones utilizando las coordenadas normales del sistema.
 b) Resuelva el sistema forzado para las coordenadas normales y luego escriba la solución más general posible para las coordenadas de las partículas a y b .
 c) Estudie el caso estacionario, observe cuando las partículas están en fase o contrafase.
 d) Muestre que considerando $m_a = m_b = m$ y despreciando el amortiguamiento se obtienen las siguientes expresiones.

$$\Psi_a \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

$$\Psi_b \approx \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t) \left[\frac{1}{\omega_1^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2 - \Omega^2} \right];$$

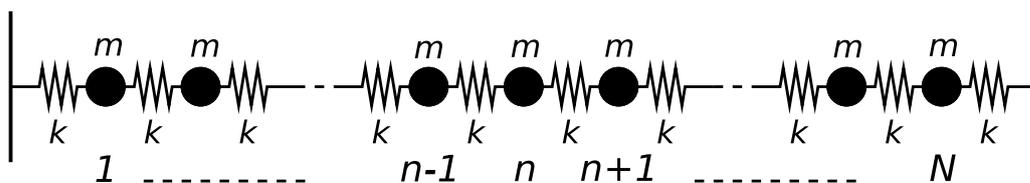
$$\frac{\Psi_b}{\Psi_a} \approx \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2 - 2\Omega^2};$$

donde ω_1 es la menor de las frecuencias modales, ω_2 es la mayor y Ω es la frecuencia de excitación.

- e) Grafique $\frac{\Psi_b}{\Psi_a}$, ¿qué representa esta relación? Indique cuándo hay una transferencia efectiva de movimiento y cuándo no.

Modos normales en sistemas periódicos

11. Considere el sistema de N masas unidas a resortes de constante elástica k y longitud natural l_0 mostrado en la figura.



- a) Usando la aproximación de pequeños ángulos, escriba la ecuación de movimiento transversal para la partícula n ésima.
 b) Proponga una solución de la forma:

$$\Psi_n^{(p)}(t) = A^{(p)} \cos \left(nk^{(p)} a + \alpha^{(p)} \right) \cos \left(\omega^{(p)} t + \phi^{(p)} \right)$$

Halle la relación de dispersión y gráfiquela. ¿Depende esta relación de las condiciones de contorno? ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?

- c) Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando ambos extremos están libres (atención: ¿cómo sería un “extremo libre” en esta configuración?) y escriba la solución general para la masa n ésima.
 d) Ídem anterior, pero considerando que el extremo izquierdo está libre y el derecho fijo a la pared.
 e) Particularice los resultados de los dos ítems anteriores para el caso en que $N = 3$.

Sistemas continuos

Modos normales de una cuerda

12. Se tiene una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0 . Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal a la expresión: $\Psi(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \theta)$. Tome el sistema de coordenadas con $x = 0$ en un extremo de la cuerda y $x = L$ en el otro. Encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:
- $\Psi(0, t) = \Psi(L, t) = 0$ (ambos extremos están fijos).
 - $\Psi(0, t) = 0$ y $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (un extremo está fijo y el otro está libre). ¿Imponer que un extremo se encuentre “libre” es equivalente a no imponer condiciones de contorno sobre ese extremo? ¿Cómo lograría un extremo “libre” para la cuerda?
 - $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(L, t) = 0$ (ambos extremos se encuentran libres). ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?
 - Ahora tome un sistema de coordenadas con $x = 0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si $\Psi(-L/2, t) = \Psi(L/2, t) = 0$ (ambos extremos fijos).
13. Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?
14. Las cuatro cuerdas de un violín, considere que todas son de igual longitud, emiten en su modo fundamental las notas: sol₂ (198/s); re₃ (297/s); la₃ (440/s) y mi₄ (660/s). La primera cuerda es de aluminio ($\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3$ y diámetro $d_1 = 0,09 \text{ cm}$); las dos siguientes son de otro material ($\rho = 1,2 \text{ g/cm}^3$) y diámetros $d_2 = 0,12 \text{ cm}$ y $d_3 = 0,1 \text{ cm}$, y la cuarta es de acero ($\rho = 7,5 \text{ g/cm}^3$) y diámetro $d_4 = 0,1 \text{ cm}$. Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.

Modos normales del gas en un tubo unidimensional

15. Se tiene un tubo de longitud L . Considere las siguientes posibilidades:
- Está cerrado en ambos extremos, lleno de aire en su interior.
 - Tiene un extremo cerrado y el otro abierto.
 - Ambos extremos están abiertos.

Datos: velocidad de propagación de las ondas v_s , L , P_0 (presión atmosférica), $\rho_0 = \gamma P_0 / v_s^2$.

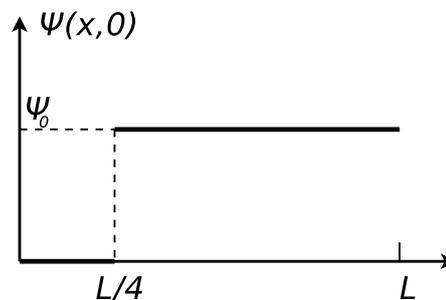
Hallar, para cada una de dichas situaciones:

- Las posibles longitudes de onda con las que puede vibrar el aire en el tubo, y sus correspondientes frecuencias.
 - Elija un sistema de referencia conveniente, y escriba la expresión más general para el desplazamiento de las partículas $\Psi(x, t)$. En dicha expresión, ¿qué parámetros conoce? ¿De qué dependen los parámetros que no conoce?
 - A partir de la expresión hallada en (b), hallar $\delta p(x, t)$ (presión en cada punto, tomando como referencia la atmosférica). ¿Cuál es la diferencia de fase entre ellas? ¿Cuánto vale la amplitud de presión?
 - Hallar $\rho(x, t)$ (densidad). ¿Cuánto vale su amplitud?
16. a) ¿Qué longitud debe tener un tubo de órgano abierto en ambos extremos para que produzca en el aire un sonido de 440 Hz?
- b) ¿Qué longitud deberá tener un tubo de órgano cerrado en uno de sus extremos para que produzca el mismo tono en su primer armónico?
17. Se tiene un tubo cerrado en uno de sus extremos; su longitud es menor a 1m. Se acerca al extremo abierto un diapason que está vibrando con $\nu = 440 \text{ Hz}$. Considere $v_s = 330 \text{ m/s}$.

- a) Hallar las posibles longitudes del tubo para que haya resonancia. Para cada una de ellas, ¿en qué modo está vibrando el aire contenido en el tubo?
- b) Repetir (a) si el tubo está abierto en ambos extremos.

Serie de Fourier: condiciones iniciales en cuerdas

18. Considere una cuerda de longitud L , de densidad de masa uniforme μ_0 sujeta en ambos extremos y sometida a una tensión T_0 . A $t = 0$ la cuerda se suelta de modo que su forma está dada por la siguiente función: $\Psi(x, 0) = H(x) = \sin(\pi x/L) + (1/3)\sin(3\pi x/L) + (1/5)\sin(5\pi x/L)$, si se toma un sistema de coordenadas tiene $x = 0$ en un extremo de la soga y $x = L$ en el otro.
 - a) Halle $\Psi(x, t)$.
 - b) Grafique $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi/5, \pi/3$ y $\pi/2$. ¿Qué clase de simetría tiene $\Psi(x, t)$ alrededor de $\omega_1 t = \pi/2$? ¿y alrededor de π ? ¿Cómo espera que sea $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 2\pi$? (ω_1 es la frecuencia fundamental).
19. Considere una cuerda de longitud L , de densidad de masa uniforme μ_0 sometida a una tensión T_0 , con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y a $t = 0$ se la suelta.

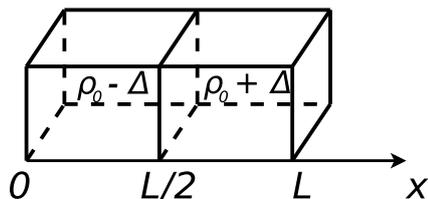


- a) Usando el sistema de coordenadas indicado en la figura, halle $\Psi(x, t)$.
 - b) Graficar $\Psi(x, t)$ para $\omega_1 t = 0, \pi$ y 2π .
 - c) Si tomara un sistema de coordenadas con el origen en el extremo libre de la cuerda, diga qué es lo que cambiaría. ¿Es conveniente ese sistema?
20. Considere una cuerda de longitud L , siendo T_0 su tensión y μ_0 su densidad lineal. Sea $\Phi(x, t)$ la elongación de la cuerda.
 - a) Escriba la expresión más general que representa un modo normal en dicha cuerda, es decir, la expresión más general de una onda estacionaria.
 - b) Sabiendo que la cuerda tiene un extremo libre y otro fijo, y que el sistema de coordenadas con el que trabaja es tal que el extremo libre está en $x = 0$ y el extremo fijo está en $x = L$, imponga las condiciones de contorno y determine las constantes pertinentes.
 - c) Usando la relación de dispersión, obtenga las posibles frecuencias temporales ν_n .
 - d) Si $\Phi(x, 0) = 0$ y $\dot{\Phi}(x, 0) = V_0 \cos(\frac{3\pi}{2L}x)$, siendo $0 \leq x \leq L$, obtenga la amplitud y fase de cada modo y halle $\Phi(x, t)$.
 21. Dada una cuerda de longitud L y densidad de masa uniforme μ , sometida a una tensión T_0 con ambos extremos fijos, demostrar que si $\Phi(x, 0)$ y $\dot{\Phi}(x, 0)$ son simétricas con respecto al centro de la cuerda, entonces los modos con números de onda $k_p = 2p\pi/L$ no se excitan.

Serie de Fourier: condiciones iniciales para gas en un tubo

22. Se tiene un tubo de longitud L cerrado en ambos extremos como se indica en la figura. El tubo presenta un tabique ubicado en la mitad del mismo. De un lado del tabique hay un gas de densidad

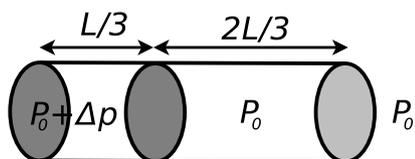
$\rho_0 - \Delta$ y del otro lado hay un gas de densidad $\rho_0 + \Delta$ (considere $\Delta \ll \rho_0$). Todo el gas se encuentra en reposo. A $t = 0$ se quita el tabique y se deja evolucionar al sistema.



- Escriba la expresión para un modo normal $\Psi_n(x, t)$ en el tubo, imponiendo las condiciones de contorno. ¿Cuáles son las longitudes de onda permitidas? (Ψ es el desplazamiento de los elementos del gas).
- Escriba la expresión de $\rho(x, 0)$ y de $\Psi(x, 0)$; gráfíquelas. Sugerencia: hallar $\Psi(x, 0)$ a partir de $\rho(x, 0)$ usando las condiciones de contorno.
- Usando las condiciones iniciales, halle $\Psi(x, t)$. Calcule $\rho(x, t)$.

Datos: ρ_0, Δ, L , velocidad del sonido en el gas v_s .

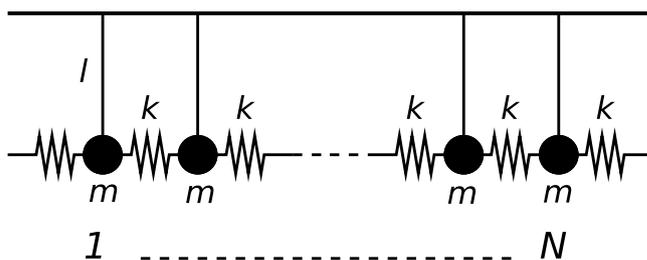
23. Se tiene un tubo dividido en dos regiones separadas por un tabique. En una de ellas se tiene una presión $P = P_0 + \Delta p$ (constante). La otra región está abierta a la atmósfera, teniendo presión P_0 . A $t = 0$ se remueve el tabique. Hallar $\delta p(x, t)$, $\Psi(x, t)$ y $\delta \rho(x, t)$.



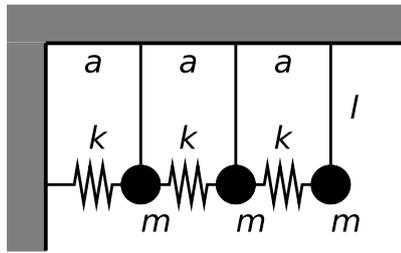
Datos: $P_0, \Delta p \ll P_0, L, \gamma$ y la velocidad del sonido en el gas v_s .

Oscilaciones forzadas de sistemas periódicos

24. Considere el sistema de péndulos acoplados de la figura. Donde todos los resortes tienen la misma longitud natural l_0

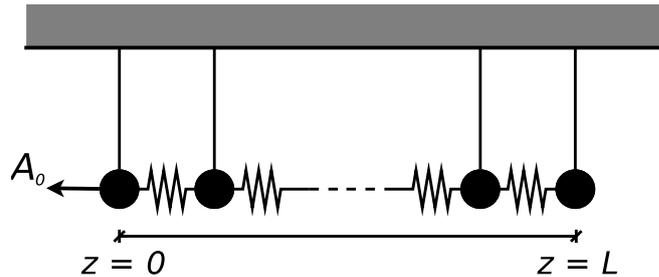


- Escriba la ecuación de movimiento. Proponga una solución semejante a la del problema 11 y halle la relación de dispersión. Compárela con la obtenida en el problema anterior. ¿Cuánto vale la frecuencia más baja? ¿Qué representa dicho modo?
- Obtenga las frecuencias correspondientes a los modos normales cuando los resortes de los extremos están fijos y dé las condiciones iniciales para excitar el primer armónico.
- Ídem anterior, pero para el caso en que uno de los resortes de los extremos está libre.
- Especifique el problema c) para 3 péndulos como se muestra en la figura.



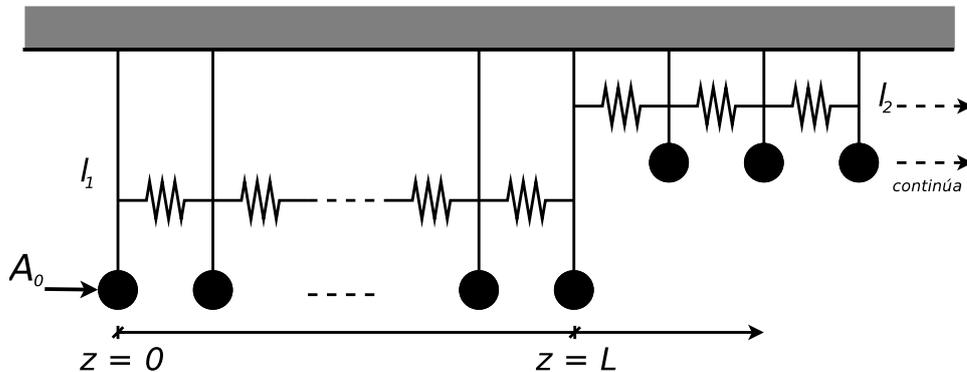
e) Suponga que en el extremo libre se aplica una fuerza $F = F_0 \cos(\omega t)$. Utilizando los modos normales para el sistema sin forzar, halle la solución estacionaria del problema forzado (considere el problema sin amortiguamiento). ¿Cuáles son las frecuencias de resonancia?

25. Considere un arreglo lineal de péndulos acoplados excitados cuyo extremo inferior está en $z = 0$ y unidos a una pared rígida en $z = L$, como se muestra en la figura.



Se aplica una fuerza externa en función del tiempo a la primera masa ($z = 0$), de forma tal que se conoce su amplitud $\Psi(0, t) = A_0 \cos(\Omega t)$. Halle el movimiento estacionario del sistema y discuta las hipótesis que hace. Compare con el caso de extremo derecho fijo a una pared (o sea: agregando un resorte a la derecha de la última masa y uniéndolo a la pared).

26. Considere un sistema de péndulos acoplados con un cambio brusco en ω_0^2 en $z = L$, según se esquematiza en la figura.



- Discuta cómo tiene que ser Ω para que el sistema se comporte como dispersivo en $0 < z < L$ y reactivo en $z > L$. ¿Cuál sería la relación entre l_1 y l_2 ?
- En dichas condiciones estudie el movimiento estacionario del sistema y encuentre las frecuencias de resonancia.
- ¿Qué pasa ahora si se invierte la relación entre l_1 y l_2 ? ¿De qué variable depende el comportamiento en $z > L$?
- ¿Es posible encontrar un rango de frecuencias Ω tal que el sistema se encuentre en el mismo rango de comportamiento en $0 < z < L$ y en $z > L$?

27. Para el sistema esquematizado en la figura, calcule $\Psi_n(t)$, si $\Omega < \omega_{min}$.

