

# Apunte para condiciones iniciales en medios continuos

Federico Cerisola (cerisola@df.uba.ar)

DF – FCEyN – UBA

## 1. Modos normales en medios continuos

Comencemos con un breve repaso de los resultados que obtenemos al plantear modos normales en sistemas continuos. Consideremos un sistema que cumple la ecuación de ondas clásica

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.0.1)$$

donde  $v^2$  es la velocidad de propagación en el medio y depende de cada sistema físico particular (por ejemplo para la cuerda  $c = \sqrt{T_0/\mu}$  con  $T_0$  la tensión en equilibrio y  $\mu$  la densidad).

Para buscar modos normales, planteamos una solución de la ecuación de la forma

$$\psi(x, t) = A \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t + \phi) \quad (1.0.2)$$

donde efectivamente vemos que todos los puntos del sistema (es decir para cada  $x$  fijo) el sistema oscila en el tiempo de forma armónica a una misma frecuencia  $\omega$ , como debe ser en un modo normal. El término  $\cos(kx + \alpha)$  nos determina la amplitud relativa de los distintos puntos del sistema en el modo (sería el equivalente a los coeficientes del autovector del modo normal que teníamos en el caso discreto).

Reemplazando esta propuesta en la ecuación de ondas obtenemos que es solución sólo si

$$\omega = vk \quad (1.0.3)$$

que es lo que llamamos la *relación de dispersión*, que relaciona la frecuencia de oscilación (*temporal*) del modo con su periodicidad *espacial*.

Finalmente, para encontrar los valores posibles de  $k$  y de  $\alpha$  teníamos que plantear las condiciones de borde, es decir qué condición de vínculo tenemos en los extremos  $x = 0$  y  $x = L$  del sistema.

Para este apunte vamos a concentrarnos el ejemplo de la cuerda, pero todo se puede aplicar de forma inmediata a cualquier otro sistema que siga la ecuación de ondas clásica (como puede ser el sistema de gas en un tubo que también analizamos en el curso).

En el caso de la cuerda las condiciones de borde que vimos son: extremo fijo (la cuerda está atada) y extremo libre (la punta de la cuerda está libre de moverse). Como vimos, estas condiciones se traducen a las ecuaciones

$$\text{extremo fijo : } \psi(x = x_{\text{extremo}}, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.0.4)$$

$$\text{extremo libre : } \frac{\partial \psi}{\partial x}(x = x_{\text{extremo}}, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.0.5)$$

(esto es simplemente un repaso de modos normales para pasar a las condiciones iniciales que es lo que nos interesa en este apunte, así que no vamos a entrar en el detalle de porqué esas son las condiciones apropiadas, que discutimos en otras clases anteriores).

A su vez, en la clase analizamos las siguientes combinaciones de condiciones de borde, que repasamos (nuevamente acá no hacemos las cuentas, que sí tienen que saber hacer, porque lo que nos interesa acá es repasar con detalle la parte de condiciones iniciales).

### 1.1. Extremos fijos

En este caso teníamos las ecuaciones

$$\psi(0, t) = 0 \quad \forall t \qquad \psi(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.1.1)$$

y esto implicaba que

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad k_p = \frac{p\pi}{L}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1.2)$$

y entonces para el modo  $p$  el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio es

$$\psi_p(x, t) = C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p) \quad (1.1.3)$$

y la solución más general posible (superposición de modos normales)

$$\psi(x, t) = \sum_{p=1} C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (1.1.4)$$

### 1.2. Extremos libres

En este caso teníamos las ecuaciones

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \forall t \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.2.1)$$

y esto implicaba que

$$\alpha = 0, \quad k_p = \frac{p\pi}{L}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.2.2)$$

y entonces para el modo  $p$  el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio es

$$\psi_p(x, t) = C_p \cos(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p) \quad (1.2.3)$$

y la solución más general posible (superposición de modos normales)

$$\psi(x, t) = \sum_{p=0} C_p \cos(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (1.2.4)$$

### 1.3. Extremos mixtos (izquierdo fijo, derecho libre)

En este caso teníamos las ecuaciones

$$\psi(0, t) = 0 \quad \forall t \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \forall t \quad (1.3.1)$$

y esto implicaba que

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad k_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1.3.2)$$

y entonces para el modo  $p$  el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio es

$$\psi_p(x, t) = C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p) \quad (1.3.3)$$

y la solución más general posible (superposición de modos normales)

$$\psi(x, t) = \sum_{p=1} C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad k_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} \quad (1.3.4)$$

## 2. Condiciones iniciales

Vamos ahora a pasar a condiciones iniciales. Primero nos vamos a concentrar en el caso en que el sistema empieza en reposo (la velocidad inicial de todo punto del sistema es cero) y sólo tenemos un apartamento inicial respecto del equilibrio. Al final comentamos cómo tratar el caso más general (que si se entiende este primer caso, entonces es inmediato).

Notemos que si la velocidad inicial es cero:  $\dot{\psi}(x, 0) = 0$ , entonces siempre podemos tomar  $\phi_p = 0$ . Efectivamente, en tal caso tenemos

$$\psi(x, t) = \sum_p C_p \cos(k_p x + \alpha_p) \cos(\omega_p t) \quad (2.0.1)$$

y entonces

$$\dot{\psi}(x, t) = \sum_p -C_p \omega_p \cos(k_p x + \alpha_p) \sin(\omega_p t) \quad (2.0.2)$$

Luego efectivamente la velocidad a tiempo cero es 0 (pues  $\sin(0) = 0$ ), como queríamos.

Nos falta entonces encontrar las  $C_p$  a partir de la forma inicial de la perturbación:  $\psi(x, 0)$ .

Vamos a mirar ejemplos particulares para fijar ideas del procedimiento, pero después será análogo para cualquier otro problema. Vamos a mirar cada una de las condiciones de bordes dadas por separado, dado que cada una tiene sus propias sutilezas.

### 2.1. Condiciones iniciales: extremos fijos

Vamos a mirar primero el caso de ambos extremos fijos, donde la solución general es

$$\psi(x, t) = \sum_{p=1} C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (2.1.1)$$

Inicialmente ( $t = 0$ ) entonces tenemos

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin(k_p x), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (2.1.2)$$

Supongamos que tenemos la siguiente condición inicial

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \quad (2.1.3)$$

que se muestra graficada en la figura 1.

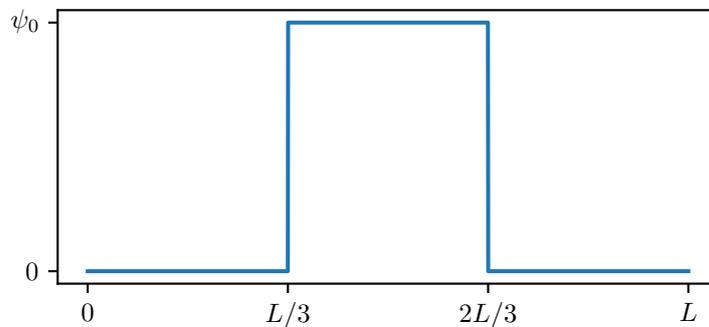


Figura 1: Ejemplo condición inicial para extremos fijos.

A muchos de ustedes les molestó que la condición inicial sea una función partida donde hay una discontinuidad. Como mencioné en la práctica, claramente esta es una idealización de una situación más realista donde

el cuadrado tiene unas pendientes a los costados. El motivo por el cuál miramos este caso idealizado es que simplifica significativamente las cuentas y además, no obstante uno haya encontrado la ecuación de ondas para la cuerda pidiendo ciertas aproximaciones, el hecho es que la ecuación de ondas final admite perfectamente este tipo de funciones como soluciones, así que podemos usarlas tranquilamente siempre que seamos conscientes de que es una idealización.

Igualando el desarrollo de modos a tiempo cero (ec. (2.1.2)) con la condición inicial (ec. (2.1.3)) necesitamos entonces que se satisfaga la igualdad

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Claramente a priori no es obvio como se puede resolver esta igualdad. Sin embargo, si uno tiene presente la teoría de series de Fourier, uno puede concluir que para que esa igualdad sea válida, la suma de senos del término a la izquierda no debe ser más que el desarrollo Fourier de la función del cuadrado inicial de la derecha.

Antes de pasar a la resolución, repasemos brevemente los conceptos fundamentales de Fourier.

### Repaso: Serie Fourier

Recordemos que la teoría de Fourier nos dice que dada una función  $f(x)$  periódica con período  $\ell$ , es decir

$$f(x + \ell) = f(x) \quad \forall x \quad (2.1.5)$$

entonces la función se puede expandir como una serie de senos y cosenos cuyos períodos son fracciones enteras de  $\ell$ :

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.6)$$

con

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.7)$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.8)$$

Comentarios:

- Notemos que efectivamente para cada  $n$  tenemos un seno y un coseno con período  $l_n$  dado por

$$l_n = \frac{2\pi}{\frac{2\pi n}{\ell}} = \frac{\ell}{n} \quad (2.1.9)$$

que es una fracción entera de  $\ell$  (el período de  $f$ ). En particular para  $n = 1$  (el primer término de la serie) tenemos senos y cosenos con período igual al de la función  $f$  que estamos desarrollando.

- La necesidad de la primer constante  $B_0$  se puede entender intuitivamente. Notemos que la integral de un seno y de un coseno en un período es 0. Por lo tanto, si integramos el desarrollo Fourier en un período  $\ell$ , todos los términos dentro de la sumatoria se anulan. Sin embargo, la integral de una función periódica cualquiera en un período (que es básicamente el valor medio de la función en un período) en general será distinta de cero (consideren por ejemplo la función  $f(x) = 1 + \sin(x)$ ). Por lo tanto, necesitamos que agregar una constante  $B_0$  para ajustar el valor medio de la función que estamos desarrollando. Efectivamente, usando la expresión para  $B_0$  tenemos

$$B_0 = \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} f(x) \cos(0) = \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} f(x) = 2 \langle f \rangle \quad (2.1.10)$$

y entonces  $B_0/2$  es efectivamente el valor medio de la función  $f$  en un período.

- Notemos que, si uno pide que  $f(x)$  se escriba como el desarrollo en serie de la ecuación (2.1.6), entonces las expresiones que ponemos más abajo para  $A_n$  y  $B_n$  se siguen inmediatamente de las propiedades de los senos y cosenos. Efectivamente, no es difícil mostrar que

$$\int_{x_0}^{x_0+\ell} \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{\ell}x\right) = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad (2.1.11)$$

$$\frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{\ell}x\right) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{\ell}x\right) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (2.1.13)$$

(es simplemente cuestión de sentarse y hacer el cálculo de las integrales integrando por partes). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.14) \\ &= \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \frac{B_0}{2} \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + \sum_{m=1} A_m \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{\ell}x\right) + \sum_{m=1} B_m \frac{2}{\ell} \int_{x_0}^{x_0+\ell} \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{\ell}x\right) \\ &= A_n \end{aligned}$$

que efectivamente es la expresión para  $A_n$  de la ecuación (2.1.7). Análogamente tendremos para los  $B_n$ .

- Cabe destacar que la serie de Fourier es única. Es decir hay una relación 1 a 1 entre  $f$  y los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ : dada  $f$  calculamos los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  y dados los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  estos me determinan unívocamente la función  $f$ . Esto significa que si por algún motivo podemos mostrar que una misma función  $f$  es igual a dos desarrollos Fourier de mismo período  $\ell$ :

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.15)$$

$$f(x) = \frac{\tilde{B}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + \tilde{B}_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.16)$$

entonces la igualdad es necesariamente término a término

$$\tilde{B}_n = B_n, \tilde{A}_n = A_n \quad (2.1.17)$$

(esto se puede mostrar fácilmente usando las propiedades de las integrales de senos y cosenos que utilizamos en el ítem anterior para calcular los valores de los  $A_n$  y  $B_n$ ).

- Como comentario general, en la práctica (por ejemplo para graficar el desarrollo) muchas veces uno termina truncando la serie y tomando eso como una aproximación de la función (parecido a como uno hace con Taylor). Como vimos en clase, podemos pensar que Fourier nos da un desarrollo para ir aproximando la función  $f(x)$  que tenemos. A diferencia de Taylor, que aproxima una función localmente, mirando como es cerca de un punto; Fourier nos da una aproximación muy distinta, que lo que mira son propiedades más globales de la función. Efectivamente, nuestra función de partida  $f(x)$  es periódica (algo que un desarrollo en Taylor nunca va a poder recuperar) y el desarrollo Fourier, a todo "orden"  $n$  que trunquemos es también siempre exactamente periódico con el mismo período que  $f$ , es decir que mantenemos esa propiedad global de la función como es su periodicidad. Si lo que queremos hacer es aproximar una función a lo largo de varios períodos y

no en un intervalo pequeño, Fourier parece mucho más natural que Taylor. Finalmente, si queremos desarrollar una función de forma que preserve su periodicidad, tenemos que sumar en el desarrollo funciones periódicas y las funciones periódicas más sencillas que conocemos son los senos y cosenos. Por lo tanto, desde este punto de vista la expresión (2.1.6) resulta bastante razonable. Luego, los coeficientes (2.1.7) los calculamos usando la propiedad del ítem anterior.

- Las integrales en el cálculo de los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  (ecs. (2.1.7)), van entre  $x_0$  y  $x_0 + \ell$ . Es decir que comprenden un período de la función  $f$ . Como  $f$  es periódica con período  $\ell$ , claramente el punto  $x_0$  que elijamos es irrelevante. Mi sugerencia al hacer cuentas es no dejar un  $x_0$  arbitrario que después debería desaparecer, sino que tomar algún  $x_0$  fijo que le haga la cuenta más fácil. En general, en mi opinión, para lo que vamos a hacer en estos ejercicios, lo más conveniente es tomar  $x_0 = -\ell/2$  de forma tal que

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.18)$$

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.19)$$

De hora en más voy a usar directamente esta versión.

- Comentario para los que cursaron Matemática 2 (o si están cursando y esto ya lo vieron). En Mate 2 se habla de espacios vectoriales y se pone énfasis, respecto a lo que se ven en el CBC, en que uno puede armarse espacios vectoriales con todo tipo de objetos, no solo tiras de números reales (lo que sería  $\mathbb{R}^n$ ). Por ejemplo, uno podría tener espacios vectoriales de funciones. Notemos que las funciones periódicas (de un mismo período) forman un espacio vectorial. Efectivamente, la suma de dos funciones con un mismo período, también es periódica con la misma periodicidad y multiplicar una función periódica por una constante tampoco cambia su periodicidad. Dado un espacio vectorial uno puede definir un producto interno. Pueden chequear que la integral en un período del producto de dos funciones periódicas (con ese mismo período) es una buena definición de producto interno. Finalmente, uno puede buscar bases de ese espacio vectorial. Una de esas bases son los senos y cosenos con períodos una fracción entera del período fundamental. Es más, resultan formar una base ortonormal. Por lo tanto, Fourier no es más que la expansión de la función en esa base particular. Por ese motivo los coeficientes de la expansión se calculan como se calculan y al igualar dos expansiones podemos igual término a término. (para ser bien formales, en realidad sólo ser periódica no basta para que exista el desarrollo Fourier, pero los casos donde eso no pasa suelen ser muy patológicos y de poca importancia práctica. Por ejemplo, si uno garantiza que una función es periódica, continua salvo una cantidad finita de discontinuidades de salto y tiene una cantidad finita de máximos y mínimos, entonces Fourier existe).

Finalmente, antes de volver a nuestro problema, veamos qué pasa con la serie de Fourier para dos grandes familias de funciones, las funciones *pares* y las funciones *impares*, lo cuál va a ser muy útil luego para la resolución de los problemas.

**Serie Fourier para funciones pares:** Una función  $f(x)$  es *par* si

$$f(-x) = f(x) \quad (2.1.20)$$

(por ejemplo, el coseno es par). En tal caso, tenemos que

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underbrace{f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right)}_{\text{impar}} = 0 \quad (2.1.21)$$

puesto que la integral de una función impar en un intervalo simétrico alrededor de 0 es 0. Por lo tanto, el desarrollo Fourier queda

$$f(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.22)$$

es decir que la función par se escribe como suma sólo de las funciones pares (cosenos).

**Serie Fourier para funciones impares:** Una función  $f(x)$  es *impar* si

$$f(-x) = -f(x) \quad (2.1.23)$$

(por ejemplo, el seno es impar). En tal caso, tenemos que

$$B_n = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \underbrace{f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right)}_{\text{impar}} = 0 \quad (2.1.24)$$

puesto que la integral de una función impar en un intervalo simétrico alrededor de 0 es 0. Por lo tanto, el desarrollo Fourier queda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.25)$$

es decir que la función impar se escribe como suma sólo de las funciones impares (senos).

Volviendo a la ecuación (2.1.4), teníamos que igualar la suma de modos normales a la función que nos viene dada como condición inicial. Para que esto sea posible, vamos a interpretar la suma de modos normales como el desarrollo Fourier de la condición inicial. Luego, usando la propiedad que recién repasamos podremos igual término a término los coeficientes de los modos normales con los coeficientes del desarrollo Fourier.

Sin embargo, en este punto puede surgir una duda. Nosotros dijimos que podemos desarrollar Fourier una función periódica, pero claramente nuestra condición inicial (y nuestro sistema) no es periódica. Sin embargo, notemos que la función  $\psi(x, t)$  tiene sentido físico solamente en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . Para  $x < 0$  y  $x > L$  la función no está definida porque simplemente no tiene significado alguno. Por lo tanto, podemos aprovechar esto para definir una nueva función  $\tilde{\psi}(x, 0)$  que sea una *extensión periódica* de  $\psi(x, 0)$  que coincida con la misma en el intervalo  $x \in [0, L]$ . Es decir que  $\psi$  es tal que

$$\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x, 0) \quad \forall x \in [0, L] \quad (2.1.26)$$

$$\tilde{\psi}(x + \ell, 0) = \tilde{\psi}(x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{con } \ell \text{ algún período a determinar} \quad (2.1.27)$$

Como  $\tilde{\psi}$  es periódica podremos utilizar Fourier para desarrollarla. Faltaría determinar con qué período extender la función. No hay una única forma de extender periódicamente una función. Por ejemplo a continuación en la figura 2 se grafican dos posibles extensiones de la condición inicial de nuestro problema.

La pregunta entonces es, cuál de todas estas elegir? La elección no es arbitraria sino que va a estar dada por el desarrollo en modos normales. Efectivamente, si  $\ell$  es el período de la función  $\tilde{\psi}$  entonces desarrollando Fourier tendremos

$$\tilde{\psi}(x, 0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.28)$$

Por otro lado, igualando con el desarrollo en modos normales (ver ec. (2.1.4)) tenemos que necesariamente

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < \frac{2L}{3} \\ 0 & \frac{2L}{3} < x < L \end{cases} = \tilde{\psi}(x, 0) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.29)$$

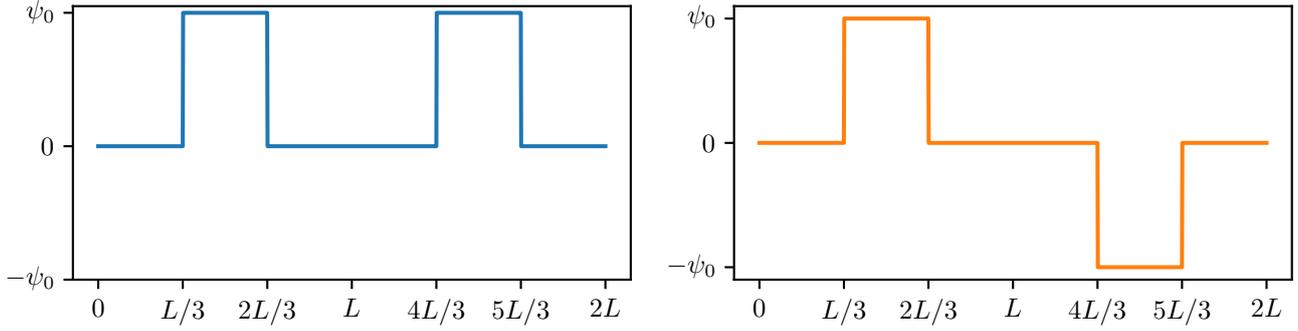


Figura 2: Ejemplo de posibles extensiones periódicas de una misma condición inicial.

y por lo tanto

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\ell}x\right) \quad (2.1.30)$$

Notemos la diferencia: la serie de la izquierda viene de la superposición de modos normales, mientras que las series de la derecha se desarrollan en Fourier la condición inicial extendida periódicamente. Nosotros ahora querríamos interpretar la serie de modos como otro desarrollo Fourier e igualar término a término los coeficientes. Esto es posible sólo si ambos desarrollos Fourier son de funciones con la misma periodicidad  $\ell$ . Como los “períodos” espaciales de los modos normales (lo que formalmente nosotros llamamos *longitud de onda*) son

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2L}{p} \quad (2.1.31)$$

entonces el modo fundamental (que corresponde en este caso a  $p = 1$ ) es

$$\lambda_{\text{fundamental}} = 2L \quad (2.1.32)$$

y todos los otros son fracciones enteras de este. Por lo tanto, en analogía con el desarrollo Fourier, lo que vamos a requerir es que el período  $\ell$  de la extensión periódica  $\tilde{\psi}$  sea justamente la longitud de onda fundamental

$$\ell = \lambda_{\text{fundamental}} = 2L \quad (2.1.33)$$

Efectivamente en tal caso la identidad entre series quedará

$$\sum_{p=1}^{\infty} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) + B_n \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (2.1.34)$$

Ya sabemos cuál es el período de la extensión. Para terminar de determinar cuál es la función extendida correcta, notemos que en la igualdad anterior entre desarrollos, del lado de modos normales solamente tenemos senos, mientras que para Fourier tenemos senos y cosenos. Por lo tanto, necesitaremos que  $B_n = 0$  para todo  $n$ . Si recordamos el repaso de Fourier que recién hicimos, esto significa que  $\tilde{\psi}(x, 0)$  tiene que ser una función *impar*. En conclusión, para extremos cerrados tenemos que la extensión periódica debe satisfacer

#### extremos cerrados

extensión  $\tilde{\psi}(x, 0)$  debe ser:

- Periódica con período:  $\ell = \lambda_{\text{fundamental}} = 2L$
- Debe ser *impar*

Con estas dos cosas, como sabemos como es la función entre 0 y  $L$  (el dato), usamos la paridad para dibujar como debe ser entre  $-L$  y 0 (simplemente dar vuelta para abajo la condición inicial) y ya tenemos la función dibujada en un intervalo de largo  $2L$  (el período) así que después es simplemente cuestión de repetir el dibujo. Tenemos entonces la función que se muestra en la figura 3.

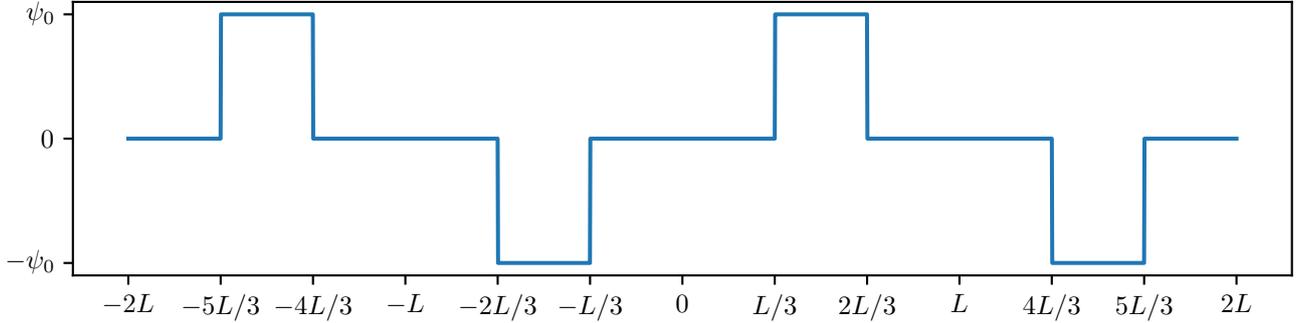


Figura 3: Extensión periódica de la condición inicial con extremos fijos.

Notemos que la extensión  $\tilde{\psi}(x, 0)$  satisface las condiciones de contorno de ambos lados de los puntos  $x = 0$  y  $x = L$  (este requisito es otra forma de justificar la elección de extensión utilizada).

Ahora que tenemos la extensión podemos calcular su desarrollo Fourier. Usando (2.1.18) tenemos para los  $B_n$

$$B_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right)}_{\text{par}} dx = 0 \quad (2.1.35)$$

impar

como queríamos. Para los  $A_n$  tenemos

$$A_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right)}_{\text{impar}} dx = \frac{4}{2L} \int_0^L \tilde{\psi}(x, 0) \sin\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right) dx \quad (2.1.36)$$

par

$$= \frac{4}{2L} \int_0^L \psi(x, 0) \sin\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx \quad (2.1.37)$$

donde en el primer renglón usamos que la integral de una función par en un intervalo simétrico alrededor de  $x = 0$  es 2 veces la integral en la mitad del intervalo y en la segunda igualdad usamos que en  $x \in [0, L]$  la extensión coincide con la condición inicial original:  $\tilde{\psi}(x, 0) = \psi(x, 0)$   $x \in [0, L]$ .

Hasta aquí, lo planteado es bien genérico y válido para cualquier problema con extremos cerrados y simplemente quedaría reemplazar quién es la función  $\psi(x, 0)$  e integrar.

Sin embargo, la expresión anterior se puede simplificar aún más aprovechando las simetrías *particulares* que tiene la condición inicial  $\psi(x, 0)$  de este problema particular. Esto nos permitirá concluir que muchos de los modos normales del sistema no se excitan con esta condición inicial sin necesidad de calcular explícitamente las integrales. Notemos que la función  $\psi(x, 0)$  es *simétrica* alrededor del punto medio  $x = L/2$ , es decir

$$\psi\left(\frac{L}{2} - \epsilon, 0\right) = \psi\left(\frac{L}{2} + \epsilon, 0\right) \quad (2.1.38)$$

Por otro lado, podemos comparar cómo es la simetría de los senos  $\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$  para cada  $n$ . En la figura 4 se muestra el gráfico de  $\psi(x, 0)$  y de los senos para algunos  $n$ . Notemos que se tiene un comportamiento

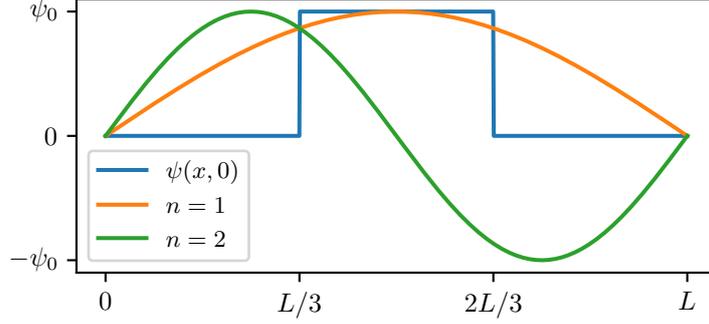


Figura 4: Comparación de la simetría de la condición inicial con distintos senos del desarrollo Fourier.

radicalmente distinto según  $n$  es par o impar: si  $n$  es impar el seno es simétrico mientras que si  $n$  es par es antisimétrico (en la figura se muestra para algunos casos pero es fácil convencerse de que esto es cierto para todo  $n$ ; más adelante mostramos como deducirlo formalmente). Este es interesante porque entonces cuando calculemos la integral de  $\psi$  (simétrica) por los senos (simétricos o antisimétricos) los casos con  $n$  par se van a anular:

$$A_{2n} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\psi(x,0)}_{\text{simétrico en } L/2} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi 2n}{L}x\right)}_{\text{antisimétrico en } L/2} dx = 0 \quad (2.1.39)$$

antisimétrico en  $L/2$

Esto tiene la consecuencia física importante de decirnos que para esta condición inicial los modos pares no se excitan.

Por otro lado, para los  $n$  impares tenemos

$$A_{2n-1} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\psi(x,0)}_{\text{simétrico en } L/2} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right)}_{\text{simétrico en } L/2} dx = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \psi(x,0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) dx \quad (2.1.40)$$

simétrico en  $L/2$

Notemos que hasta aquí, esto es válido para cualquier condición inicial con extremos fijos que sea simétrica respecto del punto medio.

Podemos demostrar formalmente la simetría de los senos alrededor de  $x = L/2$  de la siguiente manera. Notemos que la simetría de una función cualquiera  $f(x)$  respecto del punto  $x = x_0$  es la misma que la de la función  $g(x) = f(x + x_0)$  respecto de  $x = 0$ . Efectivamente

$$g(\epsilon) = \pm g(-\epsilon) \iff f(x_0 + \epsilon) = \pm f(x_0 - \epsilon) \quad (2.1.41)$$

y entonces la simetría de  $f$  alrededor de  $x_0$  es la misma que la de  $g$  alrededor del 0. Volviendo a nuestro caso, la simetría de  $\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$  alrededor de  $L/2$  será la misma de la función  $\sin\left[\frac{\pi n}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right]$  alrededor del 0. En este caso tenemos

$$\sin\left[\frac{\pi n}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi n}{L}x + \frac{\pi n}{2}\right] = \begin{cases} \pm \sin\left[\frac{\pi n}{L}x\right] & n \text{ par} \\ \pm \cos\left[\frac{\pi n}{L}x\right] & n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.1.42)$$

(donde el signo  $\pm$  afuera no nos interesa para esta discusión). Por lo tanto, como sabemos que el seno es impar y el coseno es par, entonces tenemos que

$$\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) : \begin{cases} \text{anti-simétrica alrededor de } \frac{L}{2} & n \text{ par} \\ \text{simétrica alrededor de } \frac{L}{2} & n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.1.43)$$

Con esto mostramos rigurosamente lo que vimos graficando los primeros casos de  $n$  en la figura 4.

Para finalizar la cuenta podemos reemplazar ahora sí en (2.1.40) la expresión de  $\psi(x, 0)$  obteniendo

$$A_{2n-1} = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \psi(x, 0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) = \frac{4}{L} \left[ \int_0^{L/3} 0 \cdot \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) + \int_{L/3}^{L/2} \psi_0 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) \right] \quad (2.1.44)$$

$$= \frac{4\psi_0}{L} \frac{L}{\pi(2n-1)} \left[ -\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) \right] \Big|_{L/3}^{L/2} = \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \right] \quad (2.1.45)$$

Entonces, el desarrollo Fourier de  $\psi(x, 0)$  obtenido utilizando la extensión periódica  $\tilde{\psi}$  antes definida es

$$\psi(x, 0) = \sum_n \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) \quad (2.1.46)$$

Igualando con (2.1.4) que provenía de modos normales tenemos

$$\sum_n \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) = \psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right) \quad (2.1.47)$$

y por lo tanto (notemos que los senos son todo múltiplos enteros de la misma frecuencia fundamental de ambos lados)

$$C_{2p} = A_{2p} = 0 \quad (2.1.48)$$

$$C_{2p-1} = A_{2p-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \right] \quad (2.1.49)$$

Finalmente, el apartamiento respecto de la posición de equilibrio a todo tiempo es

$$\psi(x, t) = \sum_p \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \right] \sin(k_{2p-1}x) \cos(\omega_{2p-1}t), \quad (2.1.50)$$

$$k_{2p-1} = \frac{(2p-1)\pi}{L}, \quad \omega_{2p-1} = vk_{2p-1} \quad (2.1.51)$$

Finalmente, un comentario adicional sobre la simetría de la condición inicial y como esto influye qué modos se excitan. En el ejemplo anterior vimos cómo la condición inicial simétrica respecto de la mitad de la cuerda tiene como consecuencia que sólo se exciten los modos impares. Por otro lado, si hubiésemos tenido una condición inicial antisimétrica, como se muestra en la figura 5, entonces se excitarían solamente los modos pares. En el caso general en que la condición inicial no tiene ninguna simetría dada (por ejemplo como en la figura 5), entonces se excitarán todos los modos, tanto pares como impares.

## 2.2. Condiciones iniciales: extremos libres

Veamos ahora un ejemplo con ambos extremos libres. Teníamos que la solución más general posible, escrita como suma de modos normales, es

$$\psi(x, t) = \sum_{p=0} C_p \cos(k_p x) \cos(\omega_p t + \phi_p), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (2.2.1)$$

Nuevamente, si miramos casos con velocidad inicial cero,  $\dot{\psi}(x, 0) = 0$ , entonces podemos tomar  $\phi_p = 0$  y tenemos

$$\psi(x, t) = \sum_{p=0} C_p \cos(k_p x) \cos(\omega_p t), \quad k_p = \frac{p\pi}{L} \quad (2.2.2)$$

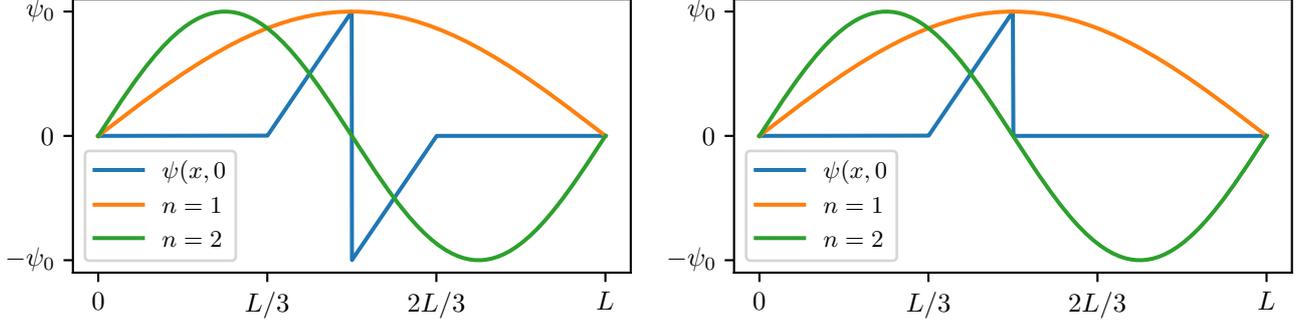


Figura 5: Comparación de la simetría de posibles condiciones iniciales con distintos senos del desarrollo Fourier.

Supongamos que tenemos como condición inicial la función

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} \psi_0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\psi_0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad (2.2.3)$$

que se muestra graficada en la figura 6.

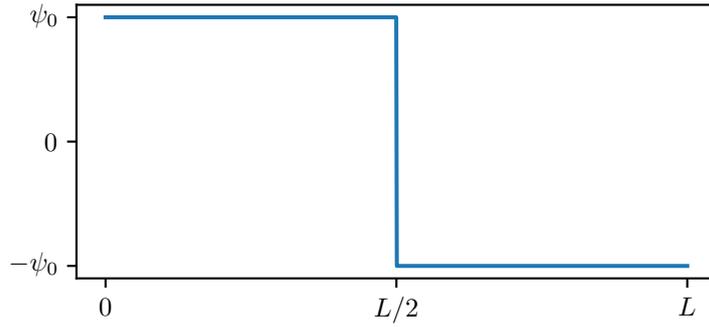


Figura 6: Ejemplo condición inicial para extremos libres.

Por lo tanto, necesitamos que

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=0} C_p \cos\left(\frac{p\pi}{L}x\right) = \psi(x, 0) = \begin{cases} \psi_0 & 0 < x < \frac{L}{2} \\ -\psi_0 & \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Análogamente al caso anterior, buscamos escribir el desarrollo Fourier de la función de la condición inicial  $\psi(x, 0)$  de forma tal aparezcan cosenos con períodos  $\lambda_p = 2L/p$ . Para ello buscamos una extensión periódica  $\tilde{\psi}(x, 0)$  apropiada de la condición inicial  $\psi(x, 0)$ . Análogamente al caso anterior, notemos que en el desarrollo Fourier aparecen senos y cosenos con períodos que son fracciones enteras del período de la función  $\tilde{\psi}(x, 0)$ , mientras que los modos normales tienen períodos espaciales (longitudes de onda) que son fracciones enteras de la longitud del modo fundamental  $\lambda_{\text{fundamental}} = 2L$ . Por lo tanto, vamos a pedir que la extensión periódica  $\tilde{\psi}(x, 0)$  tenga período  $\ell = \lambda_{\text{fundamental}} = 2L$ . Por otro lado, notemos que en este caso, en el desarrollo de modos normales tenemos solamente cosenos. Por lo tanto, vamos a pedir que la extensión periódica  $\tilde{\psi}(x, 0)$  sea par en  $x = 0$ . En resumen,

## extremos libres

extensión  $\tilde{\psi}(x, 0)$  debe ser:

- Periódica con período:  $\ell = \lambda_{\text{fundamental}} = 2L$
- Debe ser *par*

Con estas dos condiciones, entonces la extensión periódica es necesariamente la que se muestra graficada en la figura 7.

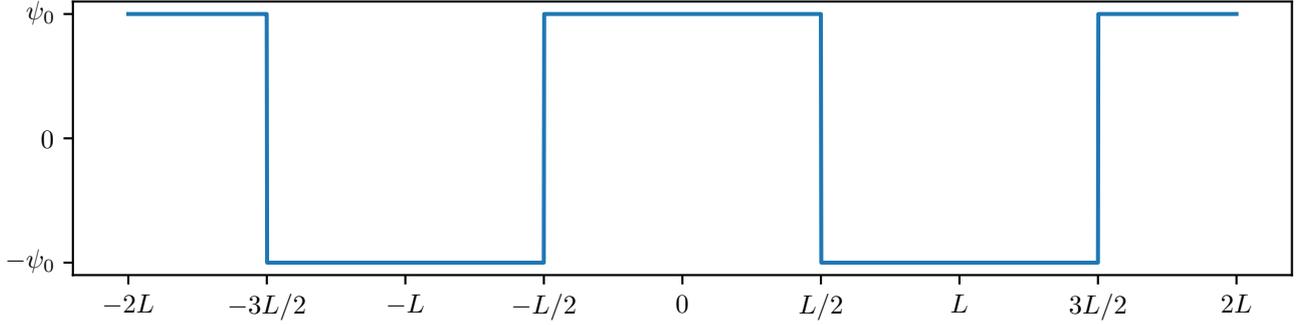


Figura 7: Extensión periódica de la condición inicial con extremos libres.

Luego, los coeficientes de la serie Fourier de  $\tilde{\psi}(x, 0)$  son

$$A_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{par}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right)}_{\text{impar}} dx = 0 \quad (2.2.5)$$

$$B_n = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{par}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right)}_{\text{par}} dx = \frac{4}{2L} \int_0^L \psi(x, 0) \cos\left(\frac{2\pi n}{2L}x\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx \quad (2.2.6)$$

Nuevamente, hasta aquí esto es válido para cualquier caso con extremos libre y solamente quedaría reemplazar la condición inicial particular  $\psi(x, 0)$  y realizar las integrales.

Sin embargo, nuevamente en este ejemplo tenemos una simetría muy particular en la condición inicial. Efectivamente, notemos que la condición inicial particular (2.2.3) es antisimétrica respecto del punto medio. De forma análoga al caso anterior, esto va a hacer que algunos de los modos no se exciten. Efectivamente, dependiendo del valor de  $p$ , los modos normales pueden ser simétricos o antisimétricos respecto del punto medio y la condición inicial antisimétrica va a hacer que solamente se exciten los modos antisimétricos.

Efectivamente, para convencernos que esto es así podemos graficar los primeros modos. Tenemos como se muestra en la figura 8.

Más formalmente, como discutimos en la sección anterior, la simetría de la función  $\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$  respecto de  $x = L/2$  es equivalente a mirar la paridad en 0 de la función

$$\cos\left[\frac{\pi n}{L}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right] = \cos\left[\frac{\pi n}{L}x + \frac{\pi n}{2}\right] = \begin{cases} \pm \cos\left[\frac{\pi n}{L}x\right] & n \text{ par} \\ \pm \sin\left[\frac{\pi n}{L}x\right] & n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.2.7)$$

(donde el signo  $\pm$  afuera no nos interesa para esta discusión). Por lo tanto, como sabemos que el seno es impar

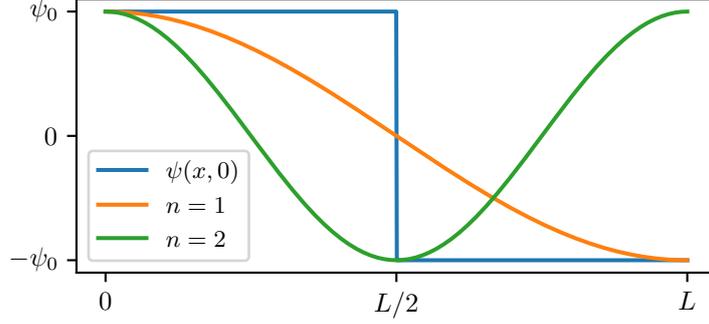


Figura 8: Comparación de la simetría de la condición inicial con distintos senos del desarrollo Fourier.

y el coseno es par, entonces tenemos que

$$\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right) : \begin{cases} \text{simétrica alrededor de } \frac{L}{2} & n \text{ par} \\ \text{anti-simétrica alrededor de } \frac{L}{2} & n \text{ impar} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Por lo tanto,

$$B_{2n} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\psi(x,0)}_{\text{anti-simétrico en } L/2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi 2n}{L}x\right)}_{\text{simétrico en } L/2} dx = 0 \quad (2.2.9)$$

anti-simétrico en  $L/2$

$$B_{2n-1} = \frac{2}{L} \int_0^L \underbrace{\psi(x,0)}_{\text{anti-simétrico en } L/2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right)}_{\text{anti-simétrico en } L/2} dx = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \psi(x,0) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) dx \quad (2.2.10)$$

simétrico en  $L/2$

$$= \psi_0 \frac{4}{L} \int_0^{L/2} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) dx = \psi_0 \frac{4}{L} \frac{L}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) \Big|_0^{L/2} \quad (2.2.11)$$

$$= \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \quad (2.2.12)$$

Finalmente, el desarrollo Fourier de la condición inicial es

$$\psi(x,0) = \sum_n \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) \quad (2.2.13)$$

Igualando con la expresión proveniente de modos normales tenemos

$$\psi(x,0) = \sum_n \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{L}x\right) = \psi(x,0) = \sum_{p=0} C_p \cos\left(\frac{p\pi}{L}x\right) \quad (2.2.14)$$

Notemos que nuevamente tenemos la misma función trigonométrica de ambos lados y las mismas longitud de onda (gracias a nuestra elección oportuna de extensión periódica). Igualando los coeficientes término a término tenemos

$$C_{2p} = 0, \quad C_{2p-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \sin\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \quad (2.2.15)$$

y entonces el apartamiento respecto de la posición de equilibrio a todo tiempo resulta

$$\psi(x, t) = \sum_{p=0} \frac{4\psi_0}{\pi(2p-1)} \sin\left(\frac{\pi(2p-1)}{2}\right) \cos(k_{2p-1}x) \cos(\omega_{2p-1}t), \quad (2.2.16)$$

$$k_{2p-1} = \frac{(2p-1)\pi}{L}, \quad \omega_{2p-1} = vk_{2p-1} \quad (2.2.17)$$

### 2.3. Condiciones iniciales: extremos mixtos (fijo – libre)

Finalmente veamos el caso de extremos mixtos, cuando el extremo fijo está en  $x = 0$  y el libre en  $x = L$ . En tal caso, la solución general como suma de modos es

$$\psi(x, t) = \sum_{p=1} C_p \sin(k_p x) \cos(\omega_p t), \quad k_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} \quad (2.3.1)$$

(donde ya tomamos que  $\phi_p = 0$  porque por ahora estamos trabajando siempre con condición inicial en reposo). A tiempo cero tenemos

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2L}x\right) \quad (2.3.2)$$

Supongamos que como condición inicial tenemos

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < L \end{cases} \quad (2.3.3)$$

y que se muestra en la figura 9.

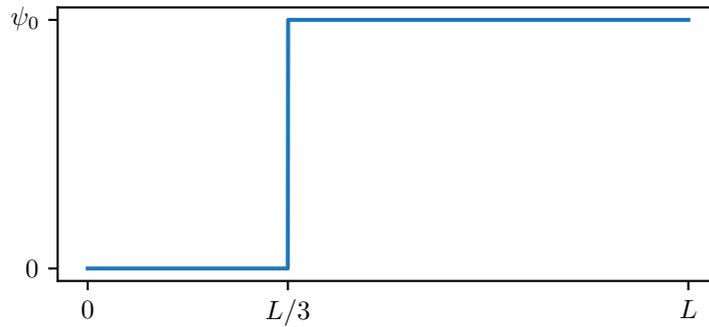


Figura 9: Ejemplo condición inicial para extremos mixtos fijo – libre.

Igualando la condición inicial al desarrollo en modos nos queda

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2L}x\right) = \psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < L \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Por lo tanto, análogamente a lo discutido en los dos casos anteriores, buscamos extender periódicamente la condición inicial para así usar su desarrollo Fourier para despejar los coeficientes. Para encontrar la extensión periódica  $\tilde{\psi}(x, 0)$  vamos a razonar de forma análoga a cómo hicimos en los casos anteriores. Como el desarrollo en modos normales solo involucra senos, entonces la extensión periódica deberá necesariamente ser impar. Además, como en el desarrollo Fourier tendremos senos con períodos fracciones enteras del período de  $\tilde{\psi}(x, 0)$  y en los modos tenemos longitudes de ondas que son una fracción entera de la fundamental  $\lambda_{\text{fundamental}} = 4L$ , entonces el período espacial de  $\tilde{\psi}(x, 0)$  deberá ser  $\lambda_{\text{fundamental}}$ .

Sin embargo, podemos notar que en este caso, a diferencia de los dos anteriores tenemos una sutileza adicional. Efectivamente, en el desarrollo en modos normales (2.3.1) solamente aparecen modos impares (y por

lo tanto longitudes de onda que son fracciones enteras impares de la fundamental). Por otro lado, en el desarrollo Fourier tenemos todas las fracciones enteras de  $\lambda_{\text{fundamental}}$ , sean pares o impares y, por lo tanto, necesitamos garantizar que la extensión periódica  $\tilde{\psi}(x, 0)$  sea tal que los coeficientes pares se anulan. Inspirándonos en los ejemplos que resolvimos antes, teniendo en cuenta la simetría que tienen los senos que aparecen en el desarrollo Fourier dependiendo de si el  $n$  es par o impar, los coeficientes pares se anularán si extendemos apropiadamente la función, de forma tal que sea simétrica respecto del punto  $x = L$ .

En resumen para este caso la extensión periódica deberá satisfacer

**extremos mixtos (fijo – libre)**

extensión  $\tilde{\psi}(x, 0)$  debe ser:

- Periódica con período:  $\ell = \lambda_{\text{fundamental}} = 4L$
- Debe ser *impar*
- Debe ser simétrica en  $x = L$

Con estas consideraciones, la extensión periódica debe ser necesariamente la que se muestra en la figura 10.

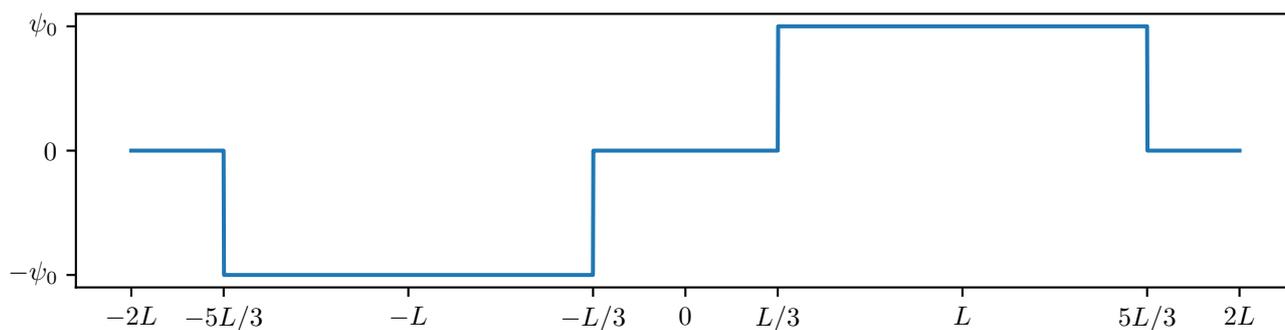


Figura 10: Extensión periódica de la condición inicial con extremos mixtos fijo – libre.

Luego, los coeficientes de la serie Fourier de  $\tilde{\psi}(x, 0)$  son

$$A_n = \frac{2}{4L} \int_{-2L}^{2L} \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{impar}} \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi n}{4L}x\right)}_{\text{impar}} = \frac{4}{4L} \int_0^{2L} \tilde{\psi}(x, 0) \sin\left(\frac{2\pi n}{4L}x\right) = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \tilde{\psi}(x, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{2L}x\right) \quad (2.3.5)$$

par

$$B_n = \frac{2}{4L} \int_{-2L}^{2L} \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{impar}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi n}{4L}x\right)}_{\text{par}} = 0 \quad (2.3.6)$$

impar

Además, para los coeficientes  $A_n$  usamos los argumentos de simetría en  $x = L$ , que se muestran ilustrados en la figura 11.

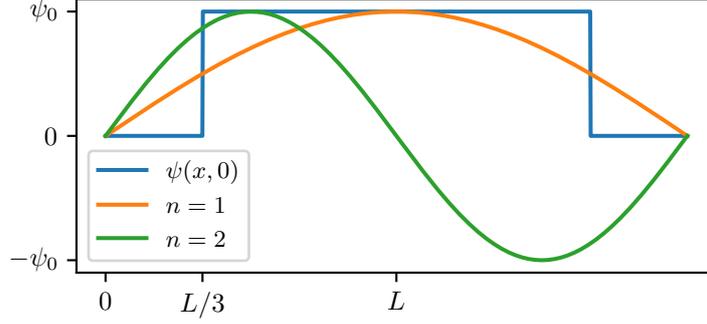


Figura 11: Comparación de la simetría de la condición inicial con distintos senos del desarrollo Fourier.

Por lo tanto, tendremos que

$$A_{2n} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{simétrica en } L} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi 2n}{2L}x\right)}_{\text{anti-simétrica en } L} = 0 \quad (2.3.7)$$

anti-simétrica en  $L$

$$A_{2n-1} = \frac{1}{L} \int_0^{2L} \underbrace{\tilde{\psi}(x, 0)}_{\text{simétrica en } L} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right)}_{\text{simétrica en } L} = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) \quad (2.3.8)$$

simétrica en  $L$

Nuevamente, hasta aquí esto es válido para cualquier caso con extremos mixtos fijo – libre y solamente quedaría reemplazar la condición inicial particular  $\psi(x, 0)$  y realizar las integrales.

Reemplazando tenemos

$$A_{2n-1} = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x, 0) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) = \frac{2}{L} \psi_0 \int_{\frac{L}{3}}^L \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) \quad (2.3.9)$$

$$= \frac{2}{L} \psi_0 \frac{2L}{\pi(2n-1)} \left[ -\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) \right] \Big|_{\frac{L}{3}}^L = \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \left[ \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2}\right) \right] \quad (2.3.10)$$

$$= \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{6}\right) \quad (2.3.11)$$

Por lo tanto igualando el desarrollo Fourier con la expansión en modos normales tenemos

$$\psi(x, 0) = \sum_{p=1} C_p \sin\left(\frac{(2p-1)\pi}{2L}x\right) = \psi(x, 0) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{L}{3} \\ \psi_0 & \frac{L}{3} < x < L \end{cases} = \sum_n \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{6}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2L}x\right) \quad (2.3.12)$$

Igualando los coeficientes tenemos que

$$C_p = A_{2p-1} = \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{6}\right) \quad (2.3.13)$$

Notemos que en este caso todos los modos del sistema se excitan. Finalmente el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio a todo tiempo es

$$\psi(x, t) = \sum_{p=1} \frac{4\psi_0}{\pi(2n-1)} \cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{6}\right) \sin(k_p x) \cos(\omega_p t), \quad (2.3.14)$$

$$k_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L}, \quad \omega_p = vk_p \quad (2.3.15)$$