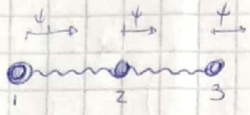
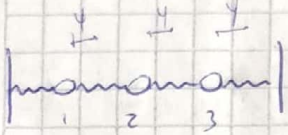
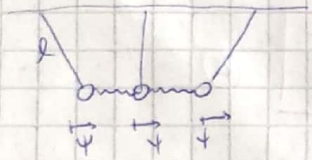
OSCILADOR ARMÓNICO (sistemas)



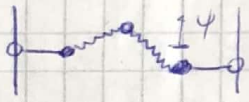
$$m_1 \ddot{\psi}_1 = (\psi_2 - \psi_1)k$$
$$m_2 \ddot{\psi}_2 = k(\psi_3 - \psi_1) - k(\psi_2 - \psi_1)$$
$$m_3 \ddot{\psi}_3 = k(\psi_3 - \psi_2)$$



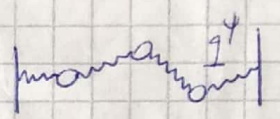
$$m_1 \ddot{\psi}_1 = -k\psi_1 + k(\psi_2 - \psi_1)$$
$$m_2 \ddot{\psi}_2 = -k(\psi_2 - \psi_1) + k(\psi_3 - \psi_2)$$
$$m_3 \ddot{\psi}_3 = -k(\psi_3 - \psi_2) - k\psi_3$$



$$l m_1 \ddot{\psi}_1 = (\psi_2 - \psi_1)k - m_1 g \psi_1$$
$$l m_2 \ddot{\psi}_2 = -k(\psi_2 - \psi_1) + k(\psi_3 - \psi_2) - m_2 g \psi_2$$
$$l m_3 \ddot{\psi}_3 = -k(\psi_3 - \psi_2) - m_3 g \psi_3$$



$$m_1 \ddot{\psi}_1 = +k(\psi_2 - \psi_1)$$
$$m_2 \ddot{\psi}_2 = -k(\psi_2 - \psi_1) + k(\psi_3 - \psi_2)$$
$$m_3 \ddot{\psi}_3 = -k(\psi_3 - \psi_2)$$



$$m_1 \ddot{\psi}_1 = k(\psi_2 - \psi_1) - k\psi_1$$
$$m_2 \ddot{\psi}_2 = -k(\psi_2 - \psi_1) + k(\psi_3 - \psi_2)$$
$$m_3 \ddot{\psi}_3 = -k(\psi_3 - \psi_2) - k\psi_3$$

En todos los casos, vamos a un sistema matricial del tipo $\boxed{\ddot{\bar{\psi}} = -M\bar{\psi}}$

Propongo que $\bar{\psi} = \bar{A}\cos(\omega t + \phi)$

Puedo suponer que en los modos normales (frecuencia de oscilación comunes para el sistema), $\psi_i = A_i \cos(\omega t + \phi) = A_i \cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t) + B\cos(\omega t)$ etc.

tal que $\ddot{\bar{\psi}} = -\omega^2 \bar{\psi}$

$\Rightarrow (\omega^2 \mathbb{I} - M)\bar{\psi} = 0 \Rightarrow$ busco ω tq $|\omega^2 \mathbb{I} - M| = 0$

Reemplazando dichos ω_α en $(\omega_i^2 \mathbb{I} - \mathbb{M})\Psi_i = 0$, obtengo los valores de A_i para cada ω_i (o B_i en función de A_i)

Si pongo los vectores (A_1, A_2, A_3) para ω_i como la columna "i" de una matriz cuadrada (normalizados), obtengo la matriz $\mathbb{C}$, que cumple

$$\boxed{\bar{\Psi} = \mathbb{C}\,\bar{\xi}}, \text{ con } \underline{\xi_i = A_i \cos(\omega_i \tau + \varphi_i)}$$

Pero este es un caso muy ideal. Si le agregamos un rozamiento al sistema (idéntico para cada masita), debo:

$$\boxed{\ddot{\bar{\Psi}} = -\mathbb{M}\bar{\Psi} - \frac{\Gamma}{m}\dot{\bar{\Psi}}} = -\mathbb{M}\mathbb{C}\bar{\xi} - \frac{\Gamma}{m}\dot{\bar{\Psi}}$$

$$\mathbb{C}^{-1}\ddot{\bar{\Psi}} = -\mathbb{C}^{-1}\mathbb{M}\mathbb{C}\bar{\xi} - \frac{\Gamma}{m}\mathbb{C}^{-1}\dot{\bar{\Psi}} = \boxed{-\mathbb{D}\bar{\xi} - \frac{\Gamma}{m}\dot{\bar{\xi}} = \ddot{\bar{\xi}}} \quad (*)$$

y propongo una solución para $\bar{\xi}$ de la forma

$$\underline{\xi_i = A_i e^{\lambda\tau}\cos(\omega_i \tau + \varphi_i)}$$

$$\dot{\xi}_i = A_i e^{\lambda\tau}\left(\lambda\cos(\omega_i\tau + \varphi_i) - \omega\,\mathrm{sen}(\omega_i\tau + \varphi)\right)$$

$$\ddot{\xi}_i = A_i e^{\lambda\tau}\left((\lambda^2 - \omega_i^2)\cos(\omega_i t + \varphi) - 2\lambda\omega_i\,\mathrm{sen}(\omega_i t + \varphi)\right)$$

Reemplazo en (*) y obtengo $\begin{cases} \lambda = \frac{-\Gamma}{2m} \\ \omega_i = \sqrt{\omega_\alpha^2 - \frac{\Gamma^2}{4m^2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \xi_\alpha = A_\alpha e^{-\frac{\Gamma}{2m}\tau}\cos\left(\sqrt{\omega_\alpha^2 - \frac{\Gamma^2}{4m^2}}\,\tau + \varphi\right) \quad \text{y} \quad \bar{\Psi} = \mathbb{C}\,\bar{\xi}$$

↳ con la misma $\mathbb{C}$ de antes

Esto me dice que a medida que avanza el tiempo se me van amortiguando los modos normales que me dan como resultado el mov. final.

Si tengo un forzamiento, a este resultado (homogéneo) le puedo sumar la solución particular del sistema excitado. En el caso de $\bar{F} = \bar{F}_0\cos(\omega t)$,

NOTA

$$\ddot{\bar{\Psi}} = -M\bar{\Psi} - \frac{\Gamma}{m}\dot{\bar{\Psi}} + \bar{F}$$
$$\ddot{\bar{\xi}} = -\mathbb{D}\bar{\xi} - \frac{\Gamma}{m}\dot{\bar{\xi}} + C^{-1}\bar{F} \quad (\text{II})$$

y propongo una solución de la forma de la inhomogeneidad: $\xi_i = A_i \cos\omega t + B_i \operatorname{sen}\omega t$

$$\Rightarrow \quad \xi_i = A_i \cos\omega t + B_i \operatorname{sen}\omega t$$
$$\dot{\xi}_i = \omega B_i \cos\omega t - \omega A_i \operatorname{sen}\omega t$$
$$\ddot{\xi}_i = -\omega^2 \xi_i$$

Reemplazando en (II), obtengo:

$$\left[(\mathbb{D} - \omega^2 \mathbb{I})B_i - \frac{\omega\Gamma}{m}A_i\right]\operatorname{sen}(\omega t) + \left[(\mathbb{D} - \omega^2\mathbb{I})A_i + \frac{\omega\Gamma}{m}B_i - \bar{F}_i'\right]\cos(\omega t) = 0$$

y, por lo tanto,

$$A_i = \frac{F_i' m^2 (\omega_i^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_i^2 - \omega^2) + \omega^2\Gamma^2}$$

→ en fase con el forzaje → COMPONENTE ELÁSTICA o DISPERSIVA

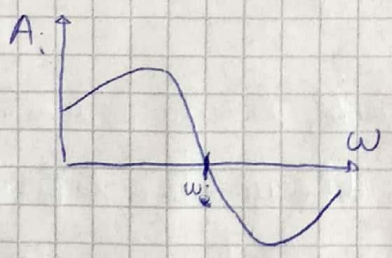
$$B_i = \frac{F_i' m\omega\Gamma}{m^2(\omega_i^2 - \omega^2) + \omega^2\Gamma^2}$$

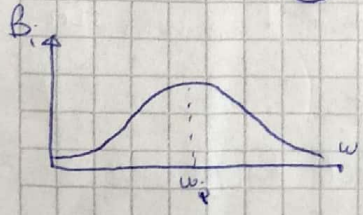
→ en cuadratura con el forzaje → COMPONENTE ABSORBENTE

→ Como $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_H + \bar{\Psi}_P = C\left(\bar{\xi}_H + \bar{\xi}_P\right)$

$\bar{\xi}_H$: decae como $e^{-\tau}\cos(\omega\tau)$ (transitorio)

$\bar{\xi}_P$: perdura en el tiempo (estacionario)





NOTA

Vimos que una solución de Ψ puede ser

$A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) = \xi_1$

$A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \xi_2$

Si sumamos ambas para obtener Ψ, y pedimos $A_1 \sim A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$

$$\Psi = A\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right) = A\left(2\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)\right)$$

$$\Psi = \underbrace{2A\cos\left(\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}\right)}_{A_{mod}}\cos\left(\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right)$$

$A_{mod} \cdot \cos(\omega_{Promedio} \cdot t)$

(Si $\omega_2 \approx \omega_1$)

BATIDO o PULSACIÓN



Cuando en un sistema $\omega_2 \approx \omega_1$, se produce el llamado "acoplamiento débil".

→ Un sistema de péndulos puede ser usado como filtro:

~~con frecuencia mayor al modo más alto y menor al más grande,~~

~~Por ejemplo, excitar el sistema derecha~~

En la masita excitada, la fuerza restauradora viene tanto de los resortes como de la excitación. Su enlargo, en las otras proviene solamente de los resortes.

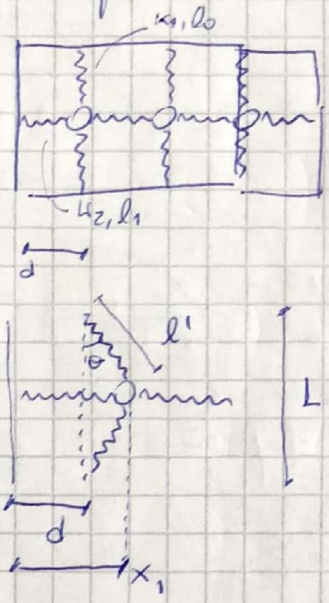
Si excito con frecuencia más alta que el modo más alto, la segunda masita no puede oscilar "igual de amplio" que la primera, porque debe mantener la fuerza restauradora (que es más grande en la primera masa) => debe disminuir su amplitud de oscilación para "correr parejo" con la primera masa.

Por eso, cuánto más alta la frecuencia, menos el efecto del forzaje en la masa no excitada. Si extendemos mucho las cuadras, el primer modo es lo más chico posible → FILTRO PASA BAJOS.

NOTA

En el modo más bajo, las masas van en fase ⇒ el resorte no se comprime ni estira. ⇒ la fuerza restauradora depende exclusivamente de la gravedad, no del resorte. Si excito con una frecuencia menor a este modo, la primera masa tiene la fuerza excitante y la de la gravedad. La segunda, para disminuir el efecto de la "gravedad + Lilo", debe aparecer una fuerza de los resortes en sentido contrario al de la gravedad, disminuyendo la amplitud de la oscilación. Cuando aumento mucho $\frac{k_2}{m}$, el segundo modo es muy alto, y llamo al sistema FILTRO PASABAJOS.

Caso particular:



→ Supongo que se mueven sólo horizontalmente.

$$m\ddot{x}_1 = -k_2 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - 2k_1 (l' - l_0) \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x_1 - d}{l'}$$

$$l' = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (x_1 - d)^2} \sim \frac{L}{2}\sqrt{1+\varepsilon} \sim \frac{L}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sim \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow -2k_1 (l' - l_0) \operatorname{sen}\theta = -2k_1 \frac{(l' - l_0)}{l'} (x_1 - d) \sim$$

$$\sim -2k_1 \left(1 - \frac{2l_0}{L}\right)(x_1 - d) \equiv -2k_1' (x_1 - d)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 = -2k_2 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) - 2k_1' (x_1 - d)$$

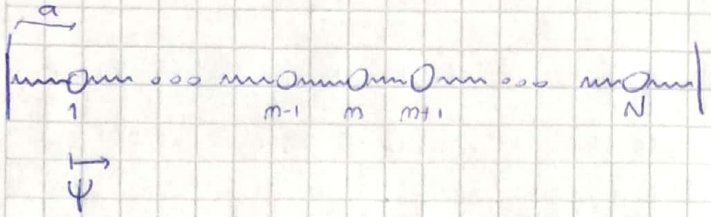
reemplazo $\psi_n = x_n - nd$

$$m\ddot{\psi}_1 = -2k_2 \psi_1 + k_2 (\psi_2 - \psi_1) - 2k_1' \psi_1.$$

es igual que antes.

NOTA

MUCHOS GRADOS DE LIBERTAD



$$m\ddot{\psi}_m = -k(\psi_m - \psi_{m-1}) + k(\psi_{m+1} - \psi_m)$$

propongo $\psi_m = A_m e^{i(\omega t + \phi)}$

$$\Rightarrow -m\omega^2 \psi_m = -m\omega^2 A_m = -k(A_m - A_{m-1}) + k(A_{m+1} - A_m)$$

$$-\omega^2 A_m = \frac{k}{m}(A_{m+1} - 2A_m + A_{m-1})$$

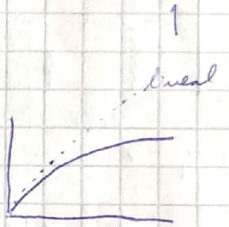
propongo $A_m = A e^{ikma}$ (k: número de onda)

$$-\omega^2 A e^{ikma} = \frac{k}{m}\left(A e^{ik(m+1)a} - 2A e^{ikma} + A e^{ik(m-1)a}\right)$$

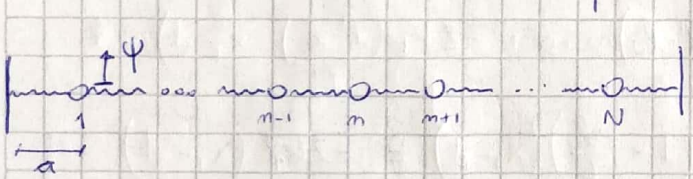
$$-\omega^2 = \frac{2k}{m}(\cos(ka) - 1) = \frac{2k}{m}\left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) - 1\right)$$

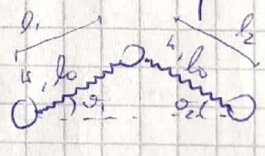
$$\boxed{\omega^2 = \frac{4k}{m}\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)}$$ RELACIÓN DE DISPERSIÓN

NO DISPERSIVO



- En los primeros modos, se comporta como un medio no dispersivo.





$$m\ddot{\psi}_m = -k(l_1 - l_0)\operatorname{sen}\theta_1 - k(l_2 - l_0)\operatorname{sen}\theta_2 \approx -k(l_1\operatorname{sen}\theta_1 + l_2\operatorname{sen}\theta_2)$$

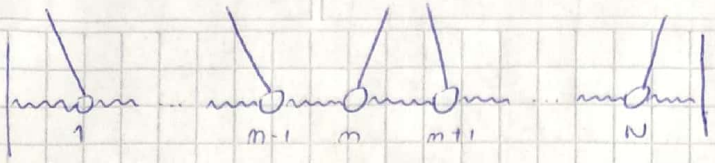
$$m\ddot{\psi}_m \approx -k\left([\psi_2 - \psi_1] + [\psi_2 - \psi_3]\right) = \text{igual a longitudinal.}$$

ojo: longitud de onda $= \frac{2\pi}{k} = \boxed{\lambda > 2a}$

NÚMERO DE ONDA

(si no, no tiene sentido físico).

NOTA



(APROX CONTINUA pag 7)

$$\ddot{\psi}_m = -g/\ell\,\psi_m + \frac{k'}{\mu}\left(\psi_{m+1} - \psi_m\right) - \frac{k'}{\mu}\left(\psi_m - \psi_{m-1}\right)$$

propongo $\psi_m = A_m e^{i(\omega t+\phi)}$

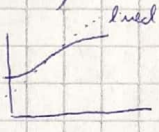
$$-\omega^2 A_m e^{i(\omega t+\phi)} = -\left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k'}{\mu}\right) A_m e^{i(\omega t+\phi)} + \frac{k'}{\mu} A_{m+1} e^{i(\omega t+\phi)} + \frac{k'}{\mu} A_{m-1} e^{i(\omega t+\phi)}$$

$$+\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{2k'}{\mu} - \frac{k'}{\mu}\left(\frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{A_m}\right) = \frac{g}{\ell} + \frac{k'}{\mu}\left(1 - \frac{A_{m+1} + A_{m-1}}{A_m}\right)$$

propongo $A_m = A e^{ikma}$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{k'}{\mu}\left(1 - \left(e^{+ika} + e^{-ika}\right)\right) = \frac{g}{\ell} + \frac{k'}{\mu}\left(1 - 2\cos(ak)\right) = \frac{g}{\ell} + \frac{2k'}{\mu}\left(1 - \left(1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right)\right)$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell} + \frac{4k'}{\mu}\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)}$$



→ Para los extremos, puedo usar bijes ($\psi = 0$) o libres ($\psi_0 = \psi_1$ o $\psi_N = \psi_{N+1}$)

En general, puedo escribir

$$\boxed{\psi_m(t) = \left[A\operatorname{sen}(kma) + B\cos(kma)\right]\cos(\omega t)}$$

APROXIMACIÓN CONTINUA (CUENTAS → CUERDA)

$a \to 0 \quad (a \ll \lambda)$

$\psi_m(t) \longrightarrow \psi(z,t)$ con $z = m \cdot a$

$$\omega = 2\sqrt{\frac{k'}{\mu}}\operatorname{sen}\left(\frac{ka}{2}\right) \sim 2\sqrt{\frac{k'}{\mu}}\left(\frac{ka}{2} - \frac{(ka)^3}{48}\right) \sim \sqrt{\frac{k'}{\mu}}\,ak$$

NO DISPERSIVO

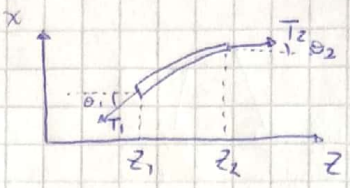
Si los resortes se consideran ideales, $T_{\text{cuerda}} = K \cdot a$ $\Rightarrow$ $\boxed{\omega \sim \sqrt{\frac{T_0 \cdot a}{m}}\,k}$

NOTA

CUERDA

VIBRACIONES TRANSVERSALES

$\Psi(z,t)$



$\frac{\Delta m}{\Delta z} \equiv \rho_0$ (recordar muy estirable)

$\sum F_z = T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = 0 \Rightarrow T_2 \cos\theta_2 = T_1 \cos\theta_1 \equiv T_0$

$\sum F_x = T_2 \operatorname{sen}\theta_2 - T_1 \operatorname{sen}\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \operatorname{tg}\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 \operatorname{tg}\theta_1 = T_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}(z_2,t) - \frac{\partial \Psi}{\partial z}(z_1,t) \right) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z}$

$\sum F_x = T_0 \Delta z \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(z,t) = (m \cdot \bar{a}) = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(z,t)$

$\rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(z,t) = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}(z,t)$ → EC. ONDAS CLÁSICA.

↳ $\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$ = velocidad de propagación

En el modo normal, propongo

$\Psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi)$

Aplico ec. ondas: $-\omega^2 A(z) = c^2 \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} \Rightarrow A(z) = B\cos(kz) + C \operatorname{sen}(kz)$

$\rightarrow \Rightarrow \boxed{\Psi_m(z,t) = \left(A\cos(kz) + B\operatorname{sen}(kz)\right)\left(C\cos(\omega t) + D\operatorname{sen}(\omega t)\right) = A\cos(\omega t + \theta)\operatorname{sen}(kx + \varphi)}$

EXTREMOS FIJOS: $\Psi(x_0, t) = 0$

EXTREMOS LIBRES: $\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x_0, t) = 0$

CONDICIONES INICIALES:

$\Psi(x, t_0) = \Psi_0$ → ¿y si no puedo escribirla como función continua?

$\dot{\Psi}(x, t_0) = \dot{\Psi}_0$

⋮

etc.

NOTA

SERIES DE FOURIER

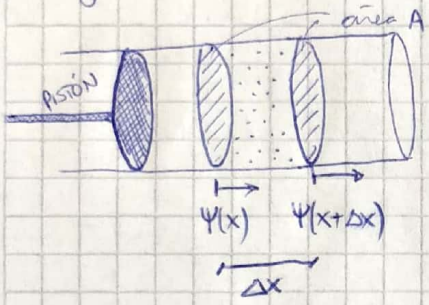
Si $F(t) = F(t+T)$, con $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) + B_m \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right), \text{ con: } \begin{cases} A_m = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt \\ B_m = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos\left(\frac{2\pi m}{T}t\right)dt \end{cases}$$

Cuando tengo C.I. en función de algo no periódico o no continuo, lo extiendo hasta el λ del primer modo y aplico Fourier.

ONDAS DE PRESIÓN

Longitudinales en un medio compresible. ← DENSIDAD, PRESIÓN, TEMPERATURA



$V \equiv$ volumen

$V_i = A \cdot \Delta x$

$V_f = A \cdot \Delta x + A\left[\Psi(x+\Delta x) - \Psi(x)\right]$

defino:

$P = P_0 + P_s$ } ec + Δ

$P = P_0 + P_s$

$$m\,(cte) = P_0 A \cdot \Delta x = P \cdot V_f = (P_0 + P_s)(A\Delta x + A\Delta\Psi)$$

(Δ: delta)

$$P_0 A \Delta x = P_0 A \Delta x + P_0 A \Delta\Psi + P_s A \Delta x + P_s A \Delta\Psi$$

$$P_s = -P_0 \frac{\Delta\Psi}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \boxed{P_s = -P_0 \frac{\partial\Psi}{\partial x}}$$

Fuerza = Presión · Área = m · a

$$A\left[P(x) - P(x+\Delta x)\right] = A\left[P_0 + P_s(x) - (P_0 + P_s(x+\Delta x))\right] = -A\left[P_s(x+\Delta x) - P_s(x)\right]\frac{\Delta x}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} -A\Delta x \frac{\partial P_s}{\partial x}$$

$$\Rightarrow m \cdot a = P_0 A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -A\Delta x \frac{\partial P_s}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial P_s}{\partial x} = -P_0 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}}$$

NOTA

$$P = P_0 + P_s = P_0 + \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho_0}(\rho - \rho_0) = P_0 + \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} \cdot \rho_s \equiv \boxed{P_0 + \chi \rho_s = P}$$

$$\boxed{P_s = \chi \rho_s}$$

$$\frac{\partial P_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \rho_s) = \chi \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = \chi \frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \chi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}} \quad \text{EC. ONDAS}$$

EXTREMOS

CERRADO: $\psi = 0$ $\quad \frac{\partial \rho_s}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial P_s}{\partial x} = 0$

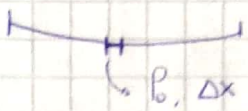
ABIERTO: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ $\quad \rho_s = 0$ $\quad P_s = 0$

~~IMPEDANCIA~~

~~En el estacionario~~,

ENERGÍA DE UNA CUERDA

$$E_c = \sum_{\text{partículas}} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

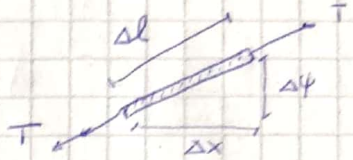


$$= \sum \frac{1}{2} (\rho_0 \Delta x) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 dx$$

$$E_p = W_{\text{fuerzas}} = \sum T \cdot (\Delta l - \Delta x)$$

(lo que se estira)



$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta \psi^2)} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta \psi}{\Delta x}\right)^2} \sim \Delta x \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta \psi}{\Delta x}\right)^2\right)$$

$$E_p = \sum T \cdot \left(\Delta x \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta \psi}{\Delta x}\right)^2\right) - \Delta x\right)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L T_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$E_{TOT} = \frac{1}{2} \left[\rho_0 \int_0^L \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 dx + T_0 \int_0^L \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 dx \right] = \mathcal{H}$$

SISTEMA CONSERVATIVO

MODOS NORMALES

$$\psi_n = A_n \cos(k_n x + \varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = -\omega_n A_n \cos(k_n x + \varphi_n) \operatorname{sen}(\omega_n t + \alpha_n)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t}\right)^2 = \omega_n^2 A_n^2 \cos^2(k_n x + \varphi_n) \operatorname{sen}^2(\omega_n t + \alpha_n)$$

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = -k_n A_n \operatorname{sen}(k_n x + \varphi_n) \cos(\omega_n t + \alpha_n)$$

$$\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)^2 = k_n^2 A_n^2 \operatorname{sen}^2(k_n x + \varphi_n) \cos^2(\omega_n t + \alpha_n)$$

NOTA

- Aplico energía y fue (red de disp), $\omega_m^2 = c^2 k_m^2 = \frac{T_0 k_m^2}{\rho_0}$

$$E_{TOT_m} = \frac{1}{2} T_0 k_m^2 A_m^2 \int_0^L \left[\cos^2(k_m x + \varphi_m) \operatorname{sen}^2(\omega_m t + \alpha_m) + \operatorname{sen}^2(k_m x + \varphi_m) \cdot \cos^2(\omega_m t + \alpha_m) \right] dx$$

uso: $k_m x + \varphi_m \equiv u$

$k_m dx = du$

$$E_m = \frac{1}{2} T_0 k_m^2 A_m^2 \left[\frac{\operatorname{sen}^2(\omega_m t + \alpha_m)}{k_m} \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} + \frac{\cos^2(\omega_m t + \alpha_m)}{k_m} \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(u)\cos(u)}{2} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} \right]$$

$$E_m = \frac{1}{2} T_0 k_m^2 A_m^2 \left[\frac{x}{2 k_m} \left(\operatorname{sen}^2(\omega_m t + \alpha_m) + \cos^2(\omega_m t + \alpha_m) \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=L}$$

$$E_m = \frac{T_0 k_m A_m^2 L}{4} = cte$$

- Como $E_{TOT} = \sum_m E_m =$ cte, SISTEMA CONSERVATIVO

DISIPACIÓN DE ENERGÍA

ONDAS: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \psi}{\partial t}$ — disipación

- Propongo $\psi(x,t) = b(x) \cdot g(t)$, linealmente

- Propongo $\begin{cases} b(x) = A\cos(kx) + B\operatorname{sen}(kx) \\ g(t) = e^{\alpha t} \text{ como siempre.} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 e^{\alpha t} \cdot (b(x))$ y $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} b(x)$

Aplico en ec. dif: $\alpha^2 e^{\alpha t} b(x) = c^2 \left(-k^2 e^{\alpha t} b(x)\right) - \gamma \alpha e^{\alpha t} b(x)$

$\alpha^2 = -k^2 c^2 - \gamma \alpha \longrightarrow$ pero $\alpha = \beta + i\omega$

$\Rightarrow$ reemplazo y II con II, IR con IR $\qquad \alpha^2 = \beta^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega$

- $\beta = -\frac{\gamma}{2}$
- $\omega = \pm \sqrt{k^2 c^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$$\psi(x,t) = (A\cos kx + B\operatorname{sen} kx)\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, e^{i\omega t}$$

(~ MODO NORMAL)

NOTA (se ve en resonancia, cuando forzar)

APROX. CONTINUA de N OSCILADORES ACOPLADOS

(pág 4).

$\psi_n(t) \to \psi(z,t)$

$\psi_{n-1}(t) \to \psi(z-a,t) \sim \psi(z,t) + a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t)$

$\psi_{n+1}(t) \to \psi(z+a,t) \sim \psi(z,t) - a\frac{\partial\psi}{\partial z}(z,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t)$

$$\Rightarrow \ddot{\psi}_n = -g/\ell\,\psi_n + \frac{k'}{m}(\psi_{n+1} - \psi_n) - \frac{k'}{m}(\psi_n - \psi_{n-1})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\psi(z,t)}{\partial t^2} = -g/\ell\,\psi(z,t) + \frac{k'a^2}{m}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t)} \quad \text{KLEIN-GORDON}$$

$\hookrightarrow g/\ell = \omega_0^2$

Propongo $\psi(z,t) = A(z)\cos(\omega t + \varphi)$ y reemplazo:

$$\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{m}{k'a^2}A(z) = 0$$

$$\hookrightarrow K^2 \equiv (\omega^2 - \omega_0^2)\frac{m}{k'a^2}$$

$\boxed{\omega > \omega_0} \Rightarrow K = \sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)\frac{m}{k'a^2}} = \frac{2\pi}{\lambda}$ SOLUCIÓN OSCILATORIA

$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \left(\frac{k'a^2}{m}\right)K^2} \to$ DISPERSIVO (pasan las perturbaciones)

Me queda $A(z) = A\operatorname{sen}(kz) + B\cos(kz)$, y según las condiciones de contorno tendré frecuencias de resonancia (las mismas que las frecuencias de los modos normales).

$\boxed{\omega < \omega_0} \Rightarrow K = \sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)\frac{m}{k'a^2}} = \frac{2\pi}{\lambda}$ SOLUCIÓN EXPONENCIAL

$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{k'a^2}{m}\right)K^2}$ REACTIVO (no pasan las perturbaciones)

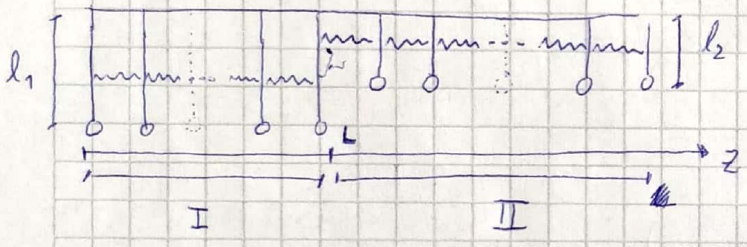
Me queda $A(z) = Ae^{-kz} + Be^{+kz}$

NOTA

Con estos resultados vemos como frecuencias mayores a ω_0 provocan una reacción oscilatoria del sistema, mientras que frecuencias menores a ω_0, una reacción exponencial en función de la distancia. A $\delta = \frac{1}{k}$ se la llama "distancia de atenuación". Por eso, este sistema funciona como un

FILTRO PASABAJOS

Por ej, en la cocinera hay un ω_0 de 10 ~ 30 MHz. Entonces, las ondas de radio AM (~ 1 MHz) rebotan en ella (no absorbe la energía, sino que produce un efecto de reflexión). Sin embargo las ondas de FM y TV tienen una frecuencia de unos 100 MHz, por lo tanto funciona como un medio dispersivo ("transparente"). Por eso se usa la cocinera para hacer llegar ondas de baja frecuencia a distancias que la curvatura de la Tierra no permitiría.



→ APROX CONTINUA

Es una función partida:

$$\Psi(z,t) \begin{cases} \Psi_I(z,t) & 0 < z < L \\ \Psi_{II}(z,t) & z > L \end{cases}$$

¡pero...!

$$\begin{cases} \Psi_I(L,t) = \Psi_{II}(L,t) \\ \frac{\partial \Psi_I}{\partial z}(L,t) = \frac{\partial \Psi_{II}}{\partial z}(L,t) \\ \omega_1 = \omega_2 \end{cases}$$

↓

(Discontinuidad en el sistema, pero no en el movimiento)

como $\begin{cases} \omega_{01} = \sqrt{g/l_1} \\ \omega_{02} = \sqrt{g/l_2} \end{cases}$

↓

puedo encontrar ω tq en la primera parte tenga régimen dispersivo y en la segunda, reactivo.

$\Rightarrow$ propongo $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$

NOTA

Sabiendo que

- $\Psi_I(z,t) = A(z)\cos(\omega t) = \left[C_1 \operatorname{sen}(k_1 z) + C_2 \cos(k_2 z)\right]\cos \omega t$, con $k_1^2 = (\omega^2 - \omega_{01}^2)\frac{m}{k' a^2}$
- $\Psi_{II}(z,t) = B(z)\cos(\omega t) = \left[C_3 e^{-k_2 z} + C_4 e^{k_2 z}\right]\cos(\omega t)$, con $k_2^2 = (\omega_{02}^2 - \omega^2)\frac{m}{k' a^2}$ reemplazando

~~Agregando las condiciones de continuidad~~

- Reemplazo los z por $z-L$, porque solo me cambian las constantes.
- Agrego las condiciones de continuidad
- Agrego condiciones de contorno:
  - $A(z=0) = A_0$ (forzado)
  - $\Psi_{II}(z \to \infty, t) = 0$

Llego a: $C_4 = 0$, $C_1 = -\frac{k_2}{k_1} C_3$, $C_2 = C_3$ } con $C_3 = \dfrac{A_0}{\frac{k_2}{k_1}\operatorname{sen}(k_1 L) + \cos(k_1 L)}$

En teoría puedo encontrar un determinado conjunto de parámetros que me haga entrar en resonancia el sistema.

PÉNDULOS IDÉNTICOS: SOLUCIÓN EXACTA

$$\ddot{\Psi}_n = -\omega_0^2 \Psi_n + \frac{k'}{m}\left(\Psi_{n+1} - 2\Psi_n + \Psi_{n-1}\right) \quad \left(+\ \Psi_n = A_n \cos(\omega t)\right)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{2k'}{m}\left[1 - \left(\frac{A_{n+1} + A_{n-1}}{2A_n}\right)\right]$$

Suponga que estamos en una zona dispersiva,

$\Rightarrow A_n = A\operatorname{sen}(kna) + B\cos(kna)$

$\Rightarrow A_{n+1} + A_{n-1} = 2A_n \cos(ka)$ → reemplazo $\Rightarrow$ $\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4k'}{m}\operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)}$

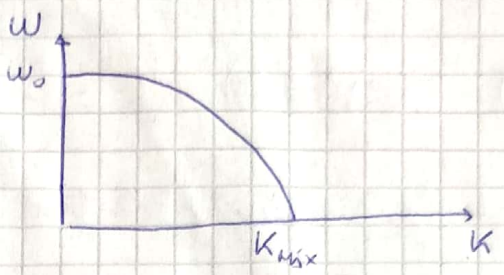
NOTA

⇒ En el régimen DISPERSIVO, $\omega_0^2 \leq \omega^2 \leq \omega_0^2 + \frac{4k'}{m}$

Si $\omega < \omega_0$, propongo $A_m = Ae^{kma} + Be^{-kma}$

$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4k'}{m} \operatorname{senh}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$

REACTIVO BAJO

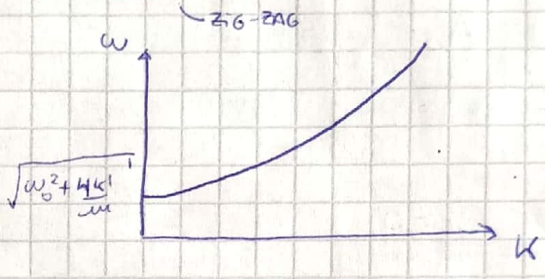


—

Si $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \frac{4k'}{m}}$, propongo $A_m = (-1)^m \underbrace{\left(Ae^{-kma} + Be^{kma}\right)}_{\text{ZG - ZAG}}$

$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4k'}{m} \operatorname{cosh}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$

REACTIVO ALTO

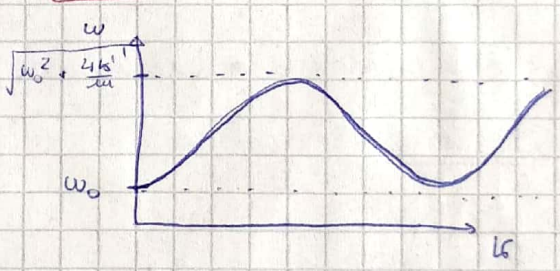


—

y el que faltaba $\omega_0^2 < \omega^2 < \omega_0^2 + \frac{4k'}{m}$

$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4k'}{m} \operatorname{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right)$

DISPERSIVO



NOTA

ONDAS DE PROPAGACIÓN

$Ae^{i(\omega t \pm kz)}$ cumple la ecuación de ondas

Además no fue ni en $z=0$ se cumple $\Psi(0,t') = A\cos\omega t'$, para cualquier z, $\Psi(z,t') = A\cos(\omega t')$

Pero como sabemos que si las propiedades del medio son constantes la onda viaja a velocidad constante,

$t' = t - \frac{z}{c}$, con c = vel. de fase.

$$\Rightarrow \Psi(z,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{c}\right) = A\cos(\omega t - kz) = \mathrm{Re}\left[Ae^{i(\omega t - kz)}\right]$$

$\Rightarrow$ Definimos

$\Psi^+(z,t) = A_1\cos(\omega t + kz)$ → se propaga hacia la izquierda

$\Psi^-(z,t) = A_2\cos(\omega t - kz)$ → " " " " derecha.

y el movimiento de un pulso viajero como $\boxed{\Psi = \Psi^+ + \Psi^-}$

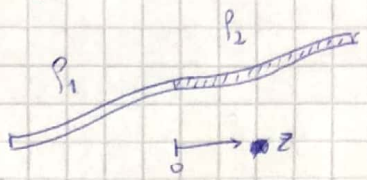
No es un modo normal, ya que los nodos no se mantienen en el mismo lugar.

- SISTEMA ABIERTO: las ondas no rebotan (espacio abierto, sala acústica)
- SISTEMA CERRADO: las ondas sí rebotan.

$\Rightarrow$ La energía del sistema viaja con la perturbación.

NOTA

SOGA



Propongo $\Psi_1 = A\cos(\omega t - kz) + B\cos(\omega t + kz)$ ← rebote

$\Psi_2 = C\cos(\omega t - kz)$

la velocidad de propagación de la onda será

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \\ v_2 = \frac{\omega}{k_2} = \sqrt{\frac{T}{\rho_2}} \end{cases}$$

Además, defino

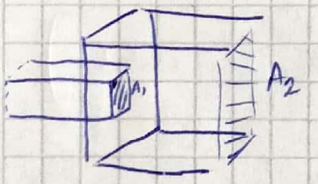
$B = R \cdot A$ → Reflexión

$C = T \cdot A$ → Transmisión.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Psi_1 = A\left(\cos(\omega t - k_1 z) + R\cos(\omega t + k_1 z)\right) \\ \Psi_2 = A \cdot T \cdot \cos(\omega t - k_2 z) \end{cases}$$

Pido condiciones de contorno (para obtener R y T)

- $\Psi_1(0,t) = \Psi_2(0,t)$
- $\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}(0,t) = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}(0,t)$

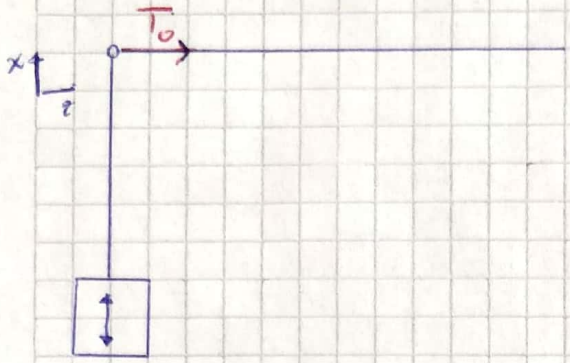


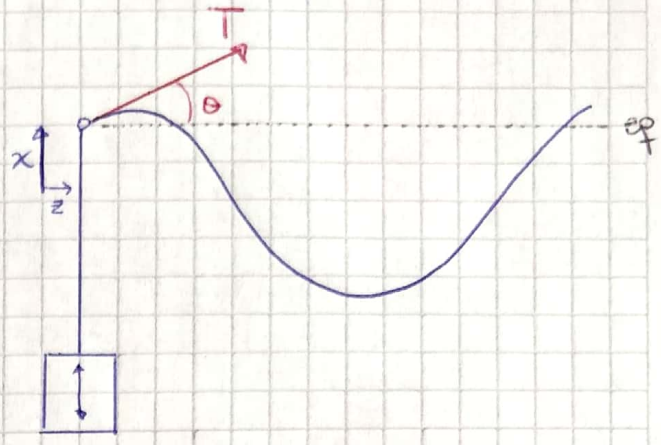
idéntico, salvo que $v_1 = \sqrt{K_1}$ y $v_2 = \sqrt{K_2}$

Pido contorno:

- $\delta P_1(0,t) = \delta P_2(0,t)$ (presión continua)
- $A_1 \left.\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\right|_0 = A_2 \left.\frac{\partial \Psi_2}{\partial t}\right|_0$ (caudal continuo)

IMPEDANCIA (Z)





F_x (sobre el anillo) $= T \cdot \operatorname{sen}\vartheta = T \operatorname{sen}\vartheta \cdot \frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta} = (T\cos\vartheta)\, tg\,\vartheta = T_0\, tg\,\vartheta.$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = T_0 \frac{\partial \Psi}{\partial z}}$$

En el estacionario, $\Psi(z,t) = A\cos(kz - \omega t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A\omega \operatorname{sen}(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -Ak \operatorname{sen}(kz - \omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \text{ con } c = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = T_0\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) = -\frac{T_0}{c}\frac{\partial \Psi}{\partial t}}$$

⇒ Cuanta mas velocidad lleva la onda, más se opone la cuerda al movimiento

$$\boxed{Z \equiv \frac{T_0}{c}}$$

MODULACIÓN

Si un batido se traslada:

$\Psi(0,t) = D(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$ (D = desplazamiento)

$$D(t) = 2A\cos\left(\underbrace{\frac{(\omega_2-\omega_1)t}{2}}_{\omega_{MOD}\cdot t}\right)\cos\left(\underbrace{\frac{(\omega_1+\omega_2)t}{2}}_{\omega_{PTO}\cdot t}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A_{mod}(t)}$$

$\Rightarrow$ Igual que antes, $t' = t - \frac{z}{v}$

$$\Rightarrow \Psi(z,t) = A_{mod}(z,t)\cos(\omega_{PTO}\cdot t - k_{PTO}\cdot z)$$

$$A_{mod}(z,t) = 2A\cos(\omega_{MOD}\cdot t - k_{MOD}\cdot z)$$

con $\begin{cases} k_{MOD} = \frac{k_2-k_1}{2} \\ k_{PTO} = \frac{k_1+k_2}{2} \end{cases}$

Si quiero ver a qué velocidad se mueve la modulación, t debe aumentar en dt, mientras z aumenta en dz, de tal forma que

$$\omega_{MOD}\,dt - k_{MOD}\,dz = 0$$ (o sea, el aumento en z para cada dt sea nulo).

Esto significa que $A_{mod}(z,t)$ es cte y voy siguiendo ese punto a la misma velocidad que él (lo trackeo)

$$\Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_{MOD} = \frac{\omega_{MOD}}{k_{MOD}} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = \frac{\omega(k_1)-\omega(k_2)}{k_1-k_2} = \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{\omega_{PTO}}$$ (si $\omega_1 \approx \omega_2$)

$$\Rightarrow \boxed{v_{GRUPO} = \frac{\partial\omega}{\partial k}}$$

$$\boxed{v_{FASE} = \frac{\omega}{k}}$$

Si $v_F(k)$ y no es cte, $v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k}(v_F(k)\cdot k) = \boxed{v_F(k) + k\cdot\frac{\partial v_F(k)}{\partial k} = v_g}$

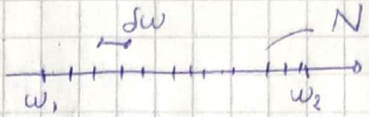
En un medio no dispersivo, $v_g = v_\phi$.

NOTA

SUPERPOSICIÓN DE N COMPONENTES ARMÓNICAS

Supongo misma amplitud y base para todas las componentes

$\omega_1 < \omega < \omega_2$



$$\delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{N-1} = \frac{\Delta\omega}{N-1}$$

$$\Psi = A\cos(\omega_1 t) + A\cos((\omega_1 + \delta\omega)\tau) + \dots + A\cos((\omega_1 + (N-2)\delta\omega)\tau) + A\cos(\omega_2 \tau)$$

$$\Psi = \sum_{m=0}^{N-1} A\cos((\omega_1 + m\delta\omega)\tau) = A \cdot \mathrm{Re}\left\{\sum_{m=0}^{N-1} e^{i[(\omega_1 + m\delta\omega)\tau]}\right\} = A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_1\tau} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} \left(e^{i\delta\omega\cdot\tau}\right)^m\right\}$$

- Como $\sum_0^N x^m = \frac{x^{N+1} - N}{x-1}$

$$\Psi = A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_1\tau} \cdot \frac{\left(e^{iN\delta\omega\cdot\tau} - 1\right)}{e^{i\delta\omega\cdot\tau} - 1}\right\} = A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_1\tau} \cdot \frac{e^{\frac{iN\delta\omega\tau}{2}}\left(e^{\frac{iN\delta\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{iN\delta\omega\tau}{2}}\right)}{e^{\frac{i\delta\omega\tau}{2}}\left(e^{\frac{i\delta\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{i\delta\omega\tau}{2}}\right)}\right\}$$

$$= A \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i\left[\omega_1\tau + \underbrace{\frac{(N-1)\delta\omega\cdot\tau}{2}}_{\Delta\omega/2}\right]}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}\right]\right\} = A\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\delta\omega\tau}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}\right]\mathrm{Re}\left\{e^{i\omega_{Pro}t}\right\}$$

$$\Psi(t) = A_{mod}(t)\cos(\omega_{Pro}\cdot\tau), \text{ con } \boxed{A_{mod}(t) = A\cdot\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}\right]}$$

Como $A_{mod}(t=0) = A\cdot N$, $A = \frac{A_{mod}(t=0)}{N}$

$$\Rightarrow \Psi(t) = \frac{A(t=0)}{N}\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{N\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}\right]\cos(\omega_{Pro}\cdot t)$$

APROX. CONTINUA:

$$\left.\begin{matrix} N\to\infty \\ \delta\omega\to 0 \end{matrix}\right\} N\delta\omega \xrightarrow{\sim} (N-1)\delta\omega = \Delta\omega \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}\left(\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}\right) \sim \frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}$$

$$\Rightarrow A_{mod} = \frac{A(0)}{N}\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\Delta\omega\cdot\tau}{2}\right)}{\frac{\delta\omega\cdot\tau}{2}} \sim A(0)\,\mathrm{senc}\left(\frac{\Delta\omega\cdot\tau}{2}\right)$$

($\Delta\omega$ en el denominador)

NOTA

$$\Rightarrow \psi(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A \cos\left[(\omega_1 + n\delta\omega)t\right] = \frac{A(0)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\delta\omega}{\delta\omega} \cos\left[(\omega_1 + n\delta\omega)t\right]$$

$$\psi(t) = \frac{A(0)}{\Delta\omega} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(\omega t)\, d\omega$$

En general:

$$\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

DISCRETO

$$f(t) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega t)$$

con $A_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \operatorname{sen}(n\omega t)\, dt$ y $B_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

CONTINUO

$$f(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \operatorname{sen}(\omega t)\, d\omega + \int_0^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t)\, d\omega$$

con $A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \operatorname{sen}(\omega t)\, dt$ y $B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t)\, dt$

o exponencial:

DISCRETO

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-i\omega_0 \tau n} + \text{c.c.}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\, e^{i\omega n \tau}\, dt$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

CONTINUO

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\, e^{-i\omega\tau}\, d\omega$$

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega\tau}\, dt$$

NOTA

La radio AM funciona usando electrones en la antena son excitados por un potencial armónico (con frecuencia ω_{Pro}). Su amplitud, dijimos, viene dada por

$$A_{mod} = A_0 + \sum_{\omega_{Mod}} A(\omega_{Mod}) \cos\left[\omega_{Mod} \cdot t + \varphi(\omega_{Mod})\right]$$

$$\Rightarrow V(t) = A_{mod}(t) \cdot \cos(\omega_{Pro} \cdot t)$$

$$V(t) = \left(A_0 + \sum_{\omega_{Mod}} A(\omega_{Mod}) \cos\left[\omega_{Mod} \cdot t + \varphi(\omega_{Mod})\right]\right) \cos(\omega_{Pro} \cdot t)$$

Que, resolviendo con identidades trigonométricas, equivale a:

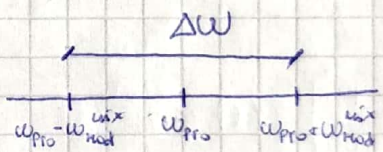
$$V(t) = A_0 \cos(\omega_{Pro} \cdot t) + \frac{1}{2} \sum_{\omega_{Mod}} \left\{ \underbrace{A(\omega_{Mod}) \cos\left[(\omega_{Pro} + \omega_{Mod})t + \varphi(\omega_{Mod})\right]}_{\Sigma = \text{BANDA LATERAL SUPERIOR}} + \underbrace{A(\omega_{Mod}) \cos\left[(\omega_{Pro} - \omega_{Mod})t + \varphi(\omega_{Mod})\right]}_{\Sigma = \text{BANDA LATERAL INFERIOR}} \right\}$$

$\Rightarrow$ En radio AM,

$$\omega_{Pro} - \omega_{Mod}^{máx} \leq \omega \leq \omega_{Pro} + \omega_{Mod}^{máx}$$

Se le llama ancho de banda a la diferencia entre frecuencias máximas y mínimas.

$$\Delta\omega = \omega_{Pro} + \omega_{Mod}^{máx} - \left(\omega_{Pro} - \omega_{Mod}^{máx}\right)$$



$$\Delta\omega = 2\omega_{Mod}^{máx}$$

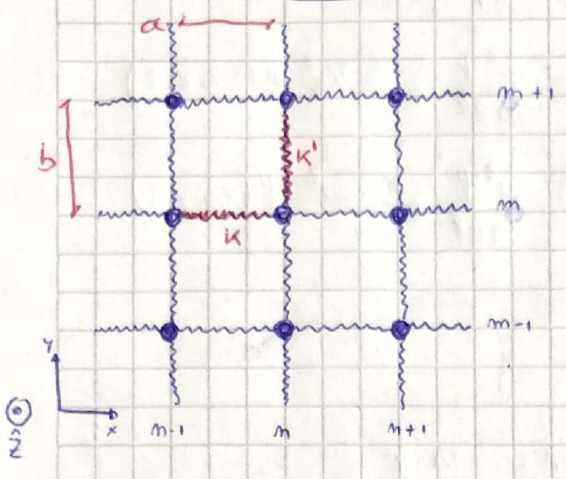
$$\Delta f = 2 f_{Mod}^{máx}$$

Entonces necesito el doble de la frecuencia máxima a alcanzar como mi ancho de banda. Por lo tanto, para emitir hasta los 20 kHz las radios AM necesitarían 40 kHz de ancho de banda.

En la realidad, no les otorga 10 kHz, por lo que solo pueden emitir sonidos de hasta 5 kHz.

NOTA

ONDAS EN 2D y 3D



$\Psi_{m,m}(t)$ = OSCILACIONES TRANSVERSALES EN $\hat{z}$

$$M\ddot{\Psi}_{m,m}(t) = k\left[\Psi_{m+1,m}(t) - 2\Psi_{m,m} + \Psi_{m-1,m}\right] + k'\left[\Psi_{m,m+1} - 2\Psi_{m,m} + \Psi_{m,m-1}\right]$$

- con $\Psi_{m,m}(t) = \Psi(x_m, y_m, t)$ $\Rightarrow$ $x_m = x$, $x_{m+1} = x+a$, $x_{m-1} = x-a$
  $y_m = y$, $y_{m+1} = y+b$, $y_{m-1} = y-b$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2\Psi(x,y,t)}{\partial t^2} = \frac{k}{M}\left[\Psi(x+a,y,t) - 2\Psi(x,y,t) + \Psi(x-a,y,t)\right] + \frac{k'}{M}\left[\Psi(x,y+b,t) - 2\Psi(x,y,t) + \Psi(x,y-b,t)\right]$$

con
- $\lim_{a\to 0}\ \Psi(x+a,y,t) \simeq \Psi(x,y,t) + a\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,y,t) + \dots$
- $\lim_{a\to 0}\ \Psi(x-a,y,t) \simeq \Psi(x,y,t) - a\frac{\partial\Psi}{\partial x}(x,y,t) + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,y,t) + \dots$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0\\ M\to 0}} \bullet\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{ka^2}{M}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{k'b^2}{M}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}(x,y,t)$$

+ SISTEMA ISÓTROPO $(a=b,\ k=k') \Rightarrow \frac{ka^2}{M} = \frac{k'b^2}{M} = \gamma^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial t^2} = \gamma^2\nabla^2\bar{\Psi}}$$ (vale para $\Psi(x,y,z,t)$)

con $\bar{\Psi} = (\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z)$

NOTA

Propongo $\Psi(x,y,z,t) = A e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t)}$ ⟶

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -k_1^2 \Psi(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = -k_2^2 \Psi(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -k_3^2 \Psi(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi(x,y,z,t)$$

En relación a $\omega^2 = v^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$

- Si $\bar{k} = (k_1, k_2, k_3)$, $\boxed{\omega^2 = v^2 k^2}$
- Si $\bar{r} = (x,y,z)$,

$$\boxed{\Psi(x,y,z,t) = A e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)}}$$

¿Cuándo es constante el argumento? PUNTOS DE FASE CONSTANTE

Si la onda viaja en $\hat{r}'$,

$$k' r' - \omega' t + \varphi = \varphi_0$$

$$r' = \frac{\varphi_0 - \varphi}{k'} + \frac{\omega'}{k'} t \longrightarrow \text{planos de fase constante}$$

Extiendo y generalizo, y defino $\hat{n}$ = versor ⊥ frente de onda

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v} t = \bar{r}_0 + v \hat{n} \cdot t}$$

¿Quiénes lo cumplen?

$$\bar{r}\hat{n} = \bar{r}_0 \hat{n} + \bar{v}\hat{n} t = r_0 + v t$$

$$k \bar{r} \hat{n} = k \bar{r}_0 \hat{n} + k \bar{v} \hat{n} t = k r_0 + \omega t$$

$$\Rightarrow \underbrace{k \hat{n}}_{\bar{k}} \cdot \hat{r} - \omega t + \varphi = cte$$

Defino $\bar{k} = k\hat{n}$

La onda plana del frente es perpendicular a $\bar{k}$ y se traslada en dir. $\bar{k}$.

¿Y si el medio es dispersivo?

$$\boxed{\omega^2 = \frac{c^2 k^2}{n^2(\omega)}}$$

NOTA

EFECTO DOPPLER

OBSERVADOR EN MOVIMIENTO

El sonido emitido por la fuente tiene una velocidad c.

El observador se (dirige / aleja) hacia la fuente con velocidad $\pm v$

Respecto del observador, no se percibe la misma velocidad c, sino

$$c' = c \pm v$$

Como $\left.\begin{array}{l} \omega = ck \\ 2\pi b = \frac{c\,2\pi}{\lambda} \end{array}\right\} \; b = \frac{c}{\lambda}$ → como no cambia el medio, λ es el mismo.

Como $c \neq c'$, $b \neq b'$

$$b' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c \pm v}{\lambda} = b \pm \frac{v}{\lambda} = b\left(1 \pm \frac{v}{\lambda b}\right) = \boxed{b\left(1 \pm \frac{v}{c}\right) = b'}$$

[⇒ Si el observador se acerca, $b' > b$
" " " aleja, $b' < b$]

FUENTE EN MOVIMIENTO

Si la fuente se mueve con velocidad $\pm v$ con sentido hacia el observador, este percibirá una long de onda λ', tq

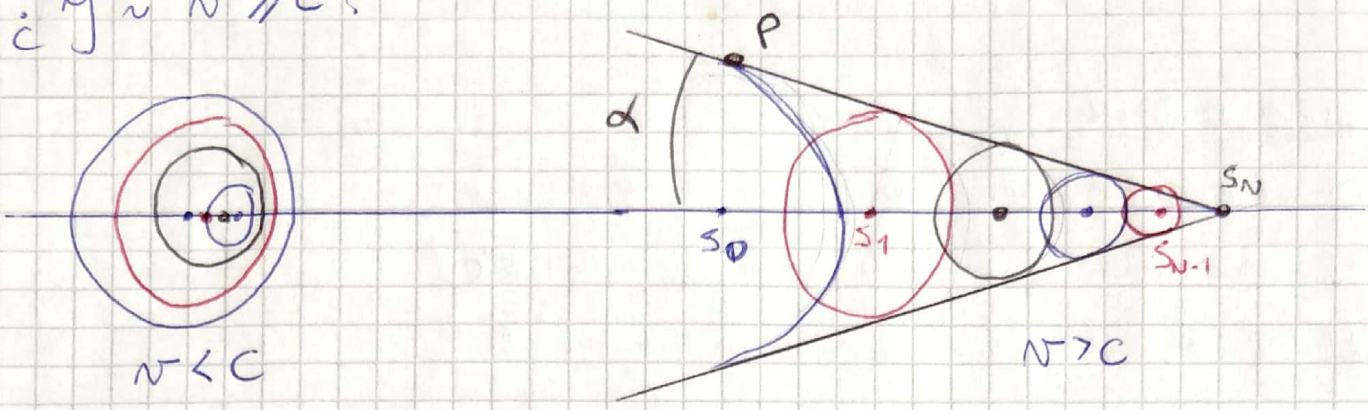
$$\lambda' = \lambda \mp \Delta\lambda \;, \quad \text{con } \lambda = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow b' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda \mp \Delta\lambda} = \frac{c}{\frac{c}{b} \mp \frac{v}{b}} = b\left(\frac{c}{c \mp v}\right) = \boxed{b\left(\frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}\right) = b'}$$

[Si la fuente se acerca, $b' > b$
Si la " " aleja, $b' < b$]

NOTA

¿Y si $v \geq c$?



Si las S_i están separadas uniformemente, $S_i = S(t_i) = S(i \cdot \tau)$

$\Rightarrow$ la distancia entre S_N y $S_0 = N\tau \cdot v$

En S_N, el frente generado en S_0 ya tiene radio $N\tau \cdot v$, y las ondas de S_N se están generando. La tangente a S_0 fue para por S_N coincide con la tangente de todas las S_i, y da que

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{dist}(S_0, P)}{\text{dist}(S_0, S_N)} = \frac{N\tau c}{N\tau \cdot v} = \boxed{\frac{c}{v} = \operatorname{sen} \alpha}$$

- α = ÁNGULO de Mach
- $\frac{v}{c}$ = NÚMERO DE Mach

NOTA

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Si adapto las ecuaciones de Maxwell al vacío (ausencia de corrientes y cargas), llego a que

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \bar{E} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \bar{B}$$

⇒ en el vacío, los campos electromagnéticos (generados en otro lado), se propagan en el vacío como ondas. No necesito un medio material para que se transmita la energía.

Si tengo cargas y corrientes, $\bar{E}$ y $\bar{B}$ también se comportan como ondas, pero con $\bar{v} = \frac{c}{n(\omega)}$ → vel. luz en el vacío.
↳ índice de refracción

	Rayos GAMMA	Rayos X	Luz U.V.	VISIBLE	Luz INFRARROJA	Microondas	Radiofrecuencia
λ(m)	10^{-13}	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}
ν(Hz)	10^{22}	10^{19}	10^{17}	10^{15}	10^{14}	10^{11}	10^{10}
fuente	NÚCLEOS ATÓMICOS	ELECTRONES INTERNOS	ELECTRONES INT. y EXT.	ELECTRONES EXTERNOS	VIBRACIONES Y ROTACIONES MOLECULARES	ESPÍN ELECTRÓNICO	CORRIENTES MACROSCÓPICAS

(1 nm = 10^{-9} m)

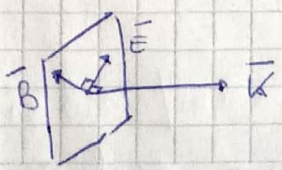
VIOLETA	AZUL	VERDE	AMARILLO	NARANJA	Rojo
380-450 nm	450-495 nm	520-570 nm	570-590 nm	590-620 nm	620-780 nm

Si $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son ondas planas monocromáticas,

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{E}_0 e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)} + \text{c.c.}$$

Si aplico Maxwell, llego a

$\bar{k} \perp \bar{E}$
$\bar{k} \perp \bar{B}$
$\bar{B} = \hat{k} \times \bar{E}$
} forman terna derecha



NOTA

VECTOR DE POYNTING

- $\bar{S} = \frac{1}{\mu} \bar{E} \times \bar{B}$

Indica la potencia transportada por la onda por unidad de área

$\Rightarrow$ Irradiancia = $\langle |\bar{S}| \rangle_t$

PROPAGACIÓN EN MEDIOS MATERIALES

- $\bar{v} = \frac{c}{n(\omega)}$ → velocidad en vacío

- $K = \frac{\omega}{v(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c} = n(\omega) \cdot K_0$ → vector de onda en el vacío.

Si $n \in \mathbb{C}$,

$$\Psi(x,t) = A e^{i(Kx - \omega t)} = A e^{i(nK_0 x - \omega t)} = A e^{i((n_1 + i n_2) K_0 x - \omega t)}$$

- $\Psi(x,t) = A e^{-K_0 n_2 x} e^{i(K_0 n_1 x - \omega t)}$

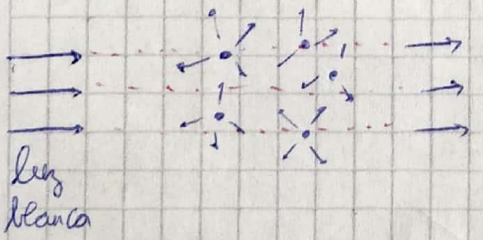
$e^{-K_0 n_2 x}$ → SE ATENÚA

$e^{i(K_0 n_1 x - \omega t)}$ → SE PROPAGA

Puede suceder dispersión anómala, que el material "absorba" det. colores.

- DISPERSIÓN CROMÁTICA: Cada frecuencia se mueve en el medio con velocidades distintas, como si fueran medios distintos.

SCATTERING DE RAYLEIGH



Del choque con moléculas se dispersa luz azulada (porque las moléculas resuenan en el ultravioleta). Por eso el cielo se ve celeste

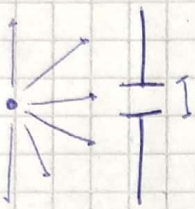
Durante un amanecer/atardecer, la luz atraviesa mucha más atmósfera, en tonces llegan a pasar solo el amarillo/rojo.

NOTA

DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA

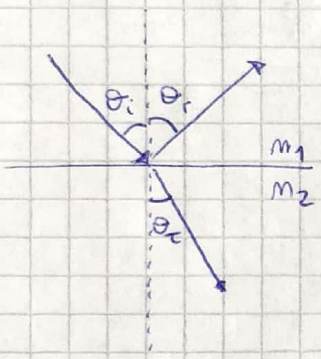
$\Psi = \bar{A} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)}$ onda plana.

- RAYO: línea imaginaria en la dirección $\bar{k}$, de propagación de la energía.



- Si $d \gg \lambda$, ÓPTICA GEOMÉTRICA (se produce un cono de luz)
- Si $d \approx \lambda$, DIFRACCIÓN (la luz sale para "cualquier" lado)

DESCRIPCIÓN FENOMENOLÓGICA (REFLEXIÓN, REFRACCIÓN)

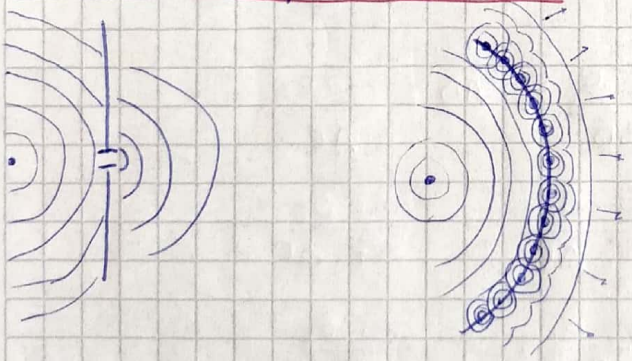


- LEYES DE SNELL

$$\theta_i = \theta_r$$

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t$$

PRINCIPIO DE HUYGENS - FRESNEL

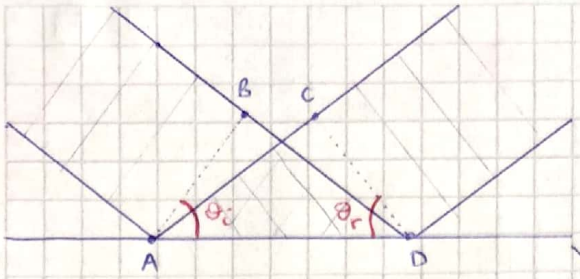


- "Cada punto sin obstruir de un frente de ondas actúa como una nueva fuente de ondas esféricas"

PRINCIPIO DE FERMAT

- "La luz sigue la ruta que tiene la menor longitud de camino óptico, que es la distancia en el vacío equivalente a la distancia recorrida en un medio de índice n. O sea, el camino óptico y la distancia real recorrida corresponden al mismo número de longitudes de onda, y el mismo cambio de fase a medida que la luz avanza.

NOTA



- Quiero que AB se transforme en CD, entonces necesito que lleguen todos los rayos en fase.

- Necesito que la longitud de onda sea mucho mayor que la separación entre las moléculas de la interfaz

- $\frac{\text{sen}\,\theta_i}{BD} = AD = \frac{\text{sen}\,\theta_r}{AC}$ (*)

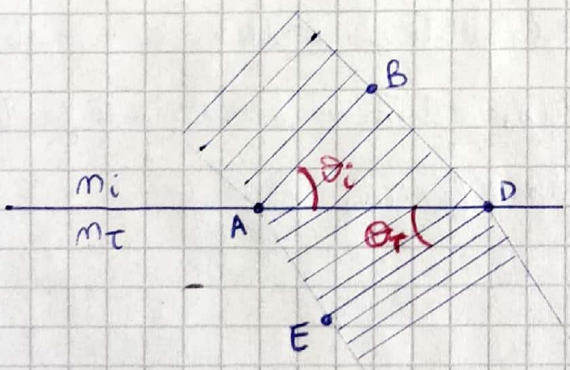
Pero como todo se produce en el medio incidente, $AC = v_i \cdot \Delta t = \frac{c}{n_i} \cdot \Delta t = BD$

Entonces $AC = BD$, por lo que (*) se resume a

- $\text{sen}\,\theta_i = \text{sen}\,\theta_r$

$$\boxed{\theta_i = \theta_r}$$

El hecho de que los rayos incidentes se doblen se denomina REFRACCIÓN



- $\frac{\text{sen}\,\theta_i}{BD} = AD = \frac{\text{sen}\,\theta_t}{AE}$

$$\frac{\text{sen}\,\theta_i}{v_i \cdot \Delta t} = \frac{\text{sen}\,\theta_t}{v_t \cdot \Delta t}$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta_i}{\frac{c}{n_i}} = \frac{\text{sen}\,\theta_t}{\frac{c}{n_t}}$$

$$\boxed{n_i\,\text{sen}\,\theta_i = n_t\,\text{sen}\,\theta_t}$$

NOTA

Desde el electromagnetismo:

- $E_i = A_i e^{i(\omega t - \bar{k}_i \cdot \bar{r})} \longrightarrow \bar{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$
- $E_r = A_r e^{i(\omega t - \bar{k}_r \cdot \bar{r})} \longrightarrow \bar{k}_r = (k_{rx}, k_{ry}, k_{rz})$
- $E_t = A_t e^{i(\omega t - \bar{k}_t \cdot \bar{r})} \longrightarrow \bar{k}_t = (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$

Por Maxwell, debe conservarse la componente tangencial del campo en la interfaz:

- $\bar{E}_i + \bar{E}_r = \bar{E}_t$

$$A_i e^{i(\omega t - \bar{k}_i \cdot \bar{r})}\Big|_{z=0} + A_r e^{i(\omega t - \bar{k}_r \cdot \bar{r})}\Big|_{z=0} = A_t e^{i(\omega t - \bar{k}_t \cdot \bar{r})}\Big|_{z=0}$$

$$A_i e^{i(-k_{ix} \cdot x)} + A_r e^{i(-k_{rx} \cdot x - k_{ry} y)} = A_t e^{i(-k_{tx} \cdot x - k_{ty} y)}$$

y las fases deben ser iguales para todo (x,y) en la superficie:

$$-k_{ix} \cdot X = -k_{rx} \cdot X - k_{ry} \cdot Y = -k_{tx} \cdot X - k_{ty} Y$$

(A) $k_{ix} = k_{rx}$ (B) $k_{rx} = k_{tx}$

$k_{ry} = 0 \longrightarrow k_{ry} = k_{ty} \longrightarrow k_{ry} = k_{ty} = 0$

TODO SUCEDE EN UN PLANO

(A) $k_{ix} = k_{rx}$

$k_i \operatorname{sen}\theta_i = k_r \operatorname{sen}\theta_r$

- Pero $k_i = k_r$ por suceder en el mismo medio

$\Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$

(B) $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$

$k_i \operatorname{sen}\theta_i = k_t \operatorname{sen}\theta_t$

$n_i k_0 \operatorname{sen}\theta_i = n_t k_0 \operatorname{sen}\theta_t$

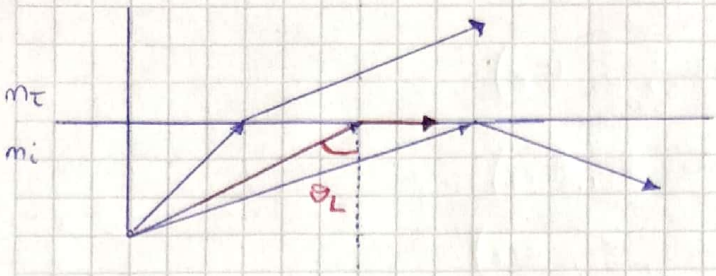
$\boxed{n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t}$

LEYES DE SNELL

NOTA

Cuando $n_t < n_i$, se puede producir lo que se conoce como

REFLEXIÓN TOTAL INTERNA



$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t$$

Cuando $\theta_t = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen}\theta_t = 1$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta_L = \frac{n_t}{n_i}}$$

- A partir del ángulo límite, toda la energía se refleja hacia el medio incidente.

¿Pero esto satisface las condiciones de contorno? ¿$E_t = 0$?

$$k_{tx}^2 + k_{tz}^2 = k_t^2 = (n_t k_0)^2$$

$$k_{tz} = \sqrt{(n_t k_0)^2 - (n_i k_0 \operatorname{sen}\theta_i)^2} \qquad (k_{tx} = k_{ix} = k_{rx})$$

$$k_{tz} = n_i k_0 \sqrt{\left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i}$$

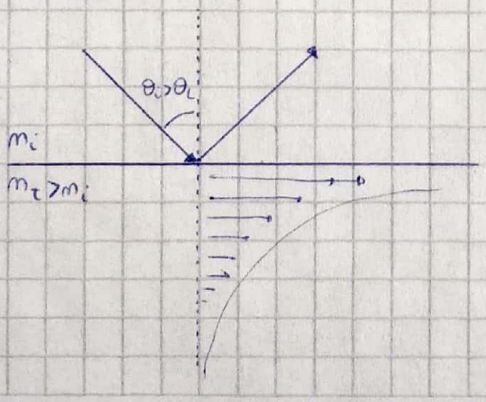
$\Rightarrow$ para $\theta_i < \theta_L$, $k_{tz} \in \mathbb{R}$

para $\theta_i > \theta_L$, $k_{tz} \in \mathbb{C}$, $k_{tz} = \pm i\, n_i k_0 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}$

$$\vec{E}_t(\vec{r},t) = \vec{E}_{0t}\, e^{i(\vec{k}_t\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_{0t}\, e^{i k_{tx} x}\, e^{i k_{tz} z}\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec{E}_t(\vec{r},t) = \vec{E}_{0t}\, e^{i n_i k_0 \operatorname{sen}\theta_i \cdot x}\, e^{\mp n_i k_0 \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - \left(\frac{n_t}{n_i}\right)^2}\, z}\, e^{-i\omega t}$$

- La intensidad no puede crecer infinitamente, entonces es sólo válida la exponencial decreciente. Por lo tanto, aumentando z disminuye el campo. En unas pocas longitudes de onda, el campo ya es despreciable.

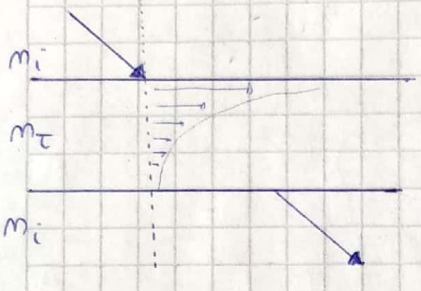


ONDA EVANESCENTE

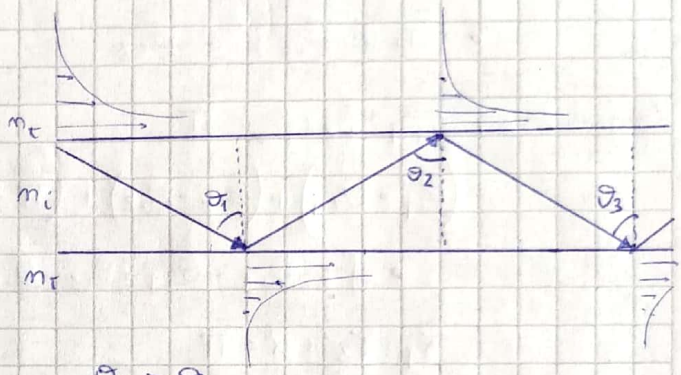
Se propaga paralela a la superficie, perdiendo energía a medida que me alejo de la interfaz.

NOTA

En teoría, podría acercar una nueva interfaz hasta que el medio de transmisión desaparezca. En ese caso, el haz incidente seguiría de largo, debido a no existir un cambio de medio. La transición ocurre gradualmente, por lo que a medida que la capa de medio de transmisión aumenta, disminuye la intensidad del haz transmitido.



REFLEXIÓN TOTAL INTERNA FRUSTRADA



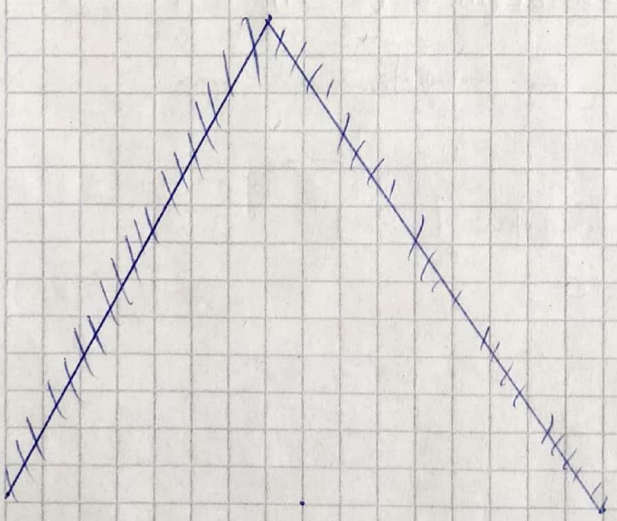
$\theta_i > \theta_t$

$n_i > n_t$

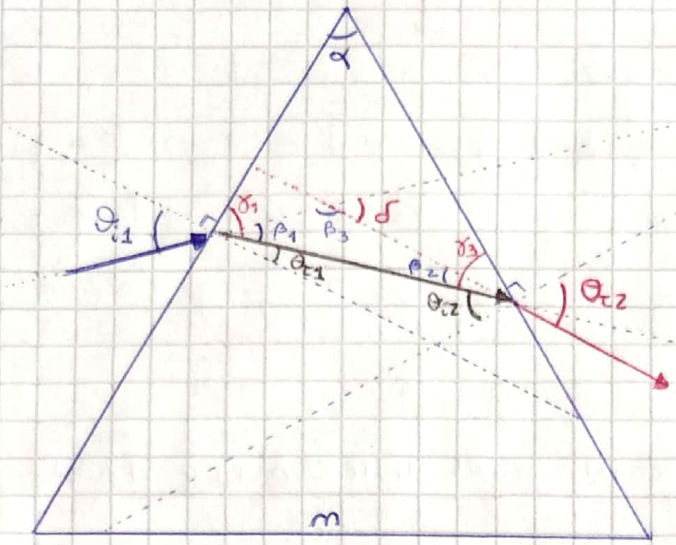
Aplicación: FIBRA ÓPTICA.

Si no se producen curvas pronunciadas, la información viaja a alta velocidad y casi sin pérdidas de energía.

~~PRISMA DE LUZ~~



PRISMA DARK SIDE



Por Snell, • $\operatorname{sen}\theta_{i1} = n \operatorname{sen}\theta_{t1}$

• $n \operatorname{sen}\theta_{i2} = \operatorname{sen}\theta_{t2}$

Por geometria, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \pi$

$$(\theta_{i1} - \theta_{t1}) + (\theta_{t2} - \theta_{i2}) + (\pi - \delta) = \pi$$

• $\delta = \theta_{i1} - \theta_{t1} + \theta_{t2} - \theta_{i2}$

$$\gamma_1 + \gamma_3 + \alpha = \pi$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{t1}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{i2}\right) + \alpha = \pi$$

• $\alpha = \theta_{i2} + \theta_{t1}$

$$\Rightarrow \delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} - \alpha = \operatorname{arcsen}\left(n \operatorname{sen}\theta_{t1}\right) + \operatorname{arcsen}\left(n \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \theta_{t1})\right) - \alpha$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \theta_{t1}} = \frac{n \cos\theta_{t1}}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2\theta_{t1}}} - \frac{n \cos(\alpha - \theta_{t1})}{\sqrt{1 - n^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \theta_{t1})}} = 0 \longrightarrow \text{ponto desviação mínima.}$$

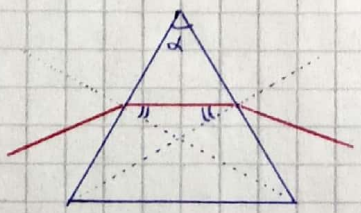
$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$

elevando: $\left(1 - n^2 \operatorname{sen}^2(\alpha - \theta_{t1})\right) \cos^2\theta_{t1} = \left(1 - n^2 \operatorname{sen}^2\theta_{t1}\right) \cos^2(\alpha - \theta_{t1})$

reacomodando: $\left(1 - n^2\right)\left(\operatorname{sen}^2(\alpha - \theta_{t1}) - \operatorname{sen}^2\theta_{t1}\right) = 0$

Como $n \neq 1$, $\boxed{\theta_{t1} = \frac{\alpha}{2}}$

Como $\theta_{t1} = \theta_{i2}$



$\Rightarrow$ Também $\theta_{i1} = \theta_{t2}$

NOTA

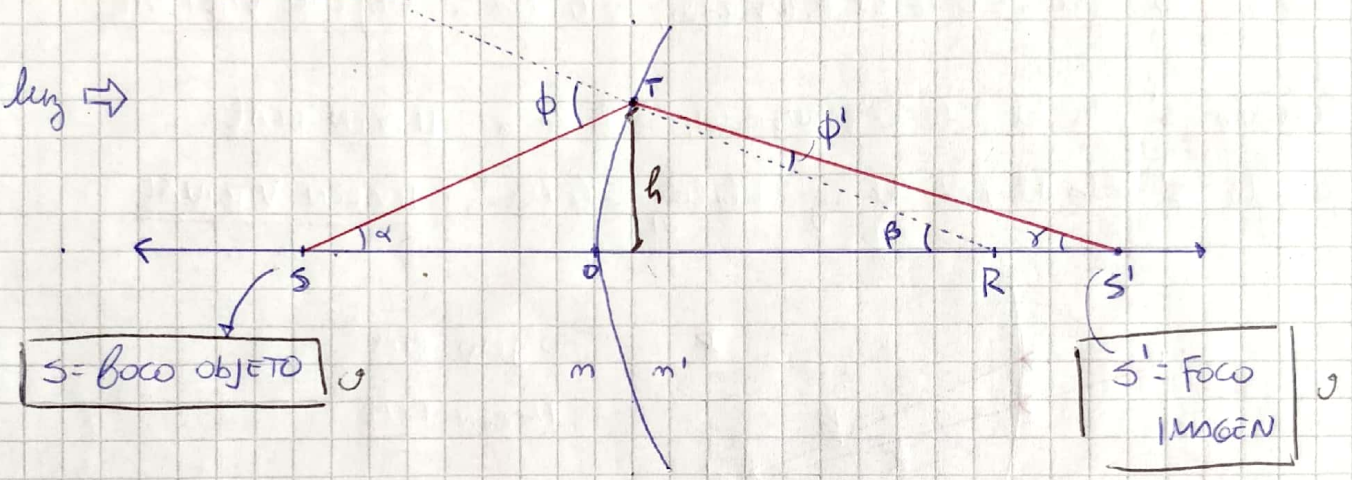
$\Rightarrow \delta_{MÍN} = \theta_{i1} + \theta_{i2} - \alpha = 2\theta_{MÍN} - \alpha$

$\theta_{MÍN} = \dfrac{\delta_{MÍN} + \alpha}{2}$

- $\operatorname{sen}(\theta_{MÍN}) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\delta_{MÍN} + \alpha}{2}\right) = n \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Encontré una relación entre el índice de refracción n, el ángulo α y el apartamiento mínimo. Conociendo n o α, puedo encontrar el otro al buscar experimentalmente el ángulo de incidencia que genere el menor apartamiento.

DIOPTRAS ESFÉRICAS



- $\triangle_{STR}$: $\alpha + \beta + (\pi - \phi) = \pi \Rightarrow \phi = \alpha + \beta$
- $\triangle_{TRS'}$: $\gamma + \phi' + (\pi - \beta) = \pi \Rightarrow \phi' = \beta - \gamma$
- Snell: $n \operatorname{sen}\phi = n' \operatorname{sen}\phi' \longrightarrow$ APROX. PARAXIAL (los rayos no se alejan mucho del eje)

$$n\phi = n'\phi'$$

$$n(\alpha + \beta) = n'(\beta - \gamma)$$

- Pero: $\alpha \sim \operatorname{sen}\alpha \sim \dfrac{h}{S}$

$\beta \sim \operatorname{sen}\beta \sim \dfrac{h}{R}$

$\gamma \sim \operatorname{sen}\gamma \sim \dfrac{h}{S'}$

$$\boxed{\frac{n}{S} + \frac{n'}{S'} = \frac{n' - n}{R}}$$

FÓRMULA DE DIOPTRAS PARA GEOMETRÍAS ESFÉRICAS

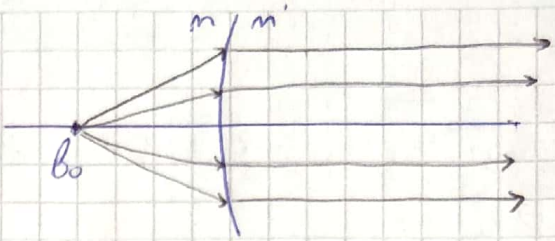
POTENCIA DE LA DIOPTRA.

NOTA

FOCO OBJETO

Pongo la imagen en el infinito

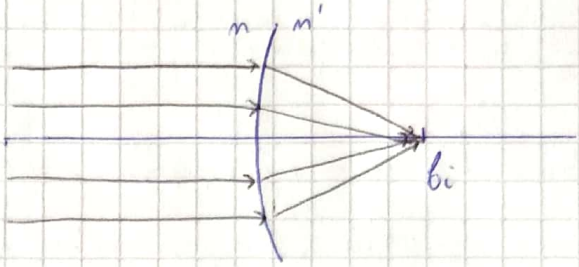
$$s' = \infty \Rightarrow s\big|_{s'=\infty} = \boxed{b_o = -\frac{nR}{n'-n}}$$



FOCO IMAGEN

Pongo el objeto en el infinito

$$s = \infty \Rightarrow s'\big|_{s=\infty} = \boxed{b_i = \frac{n'R}{n'-n}}$$

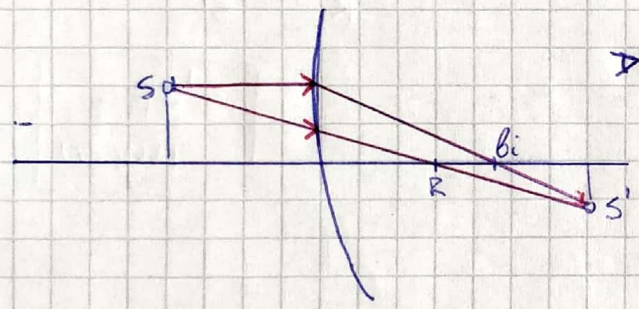


Cuando s está del lado del origen de la luz, se le llama OBJETO REAL

Cuando s está del lado del observador, se le llama OBJETO VIRTUAL

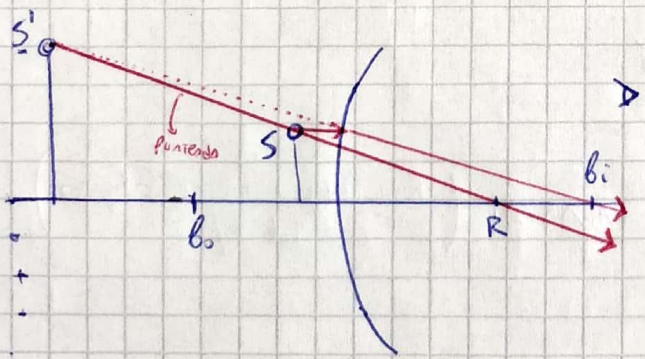
Cuando s' está del lado del observador, se le llama IMAGEN REAL

Cuando s' está del lado del origen de la luz, se le llama IMAGEN VIRTUAL



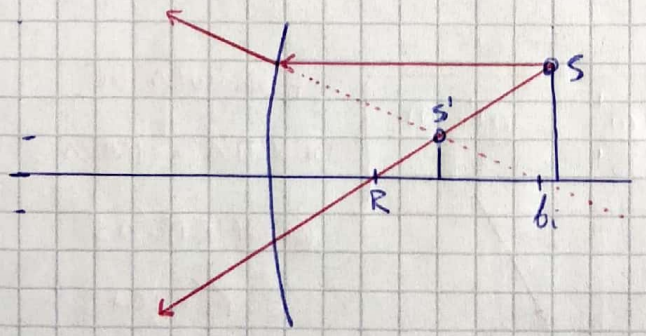
OBJETO REAL

IMAGEN REAL



OBJETO REAL

IMAGEN VIRTUAL



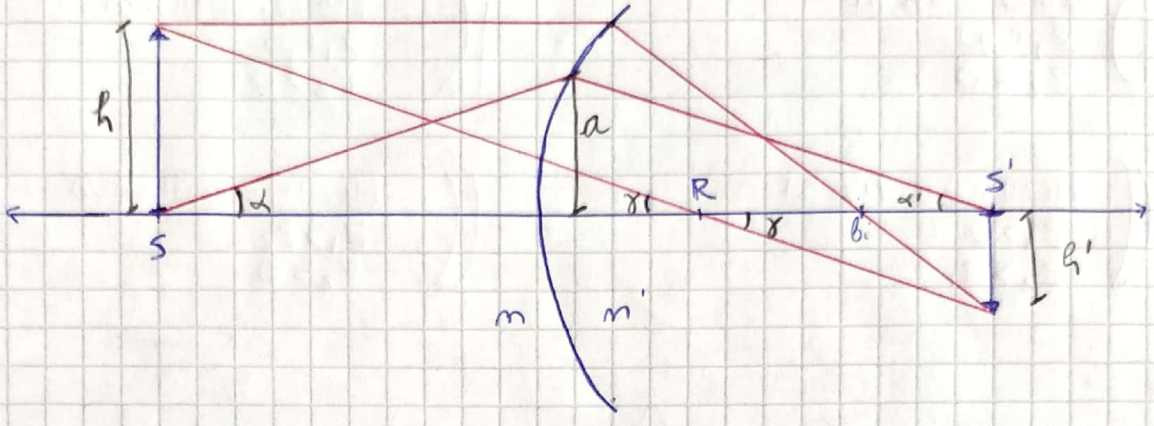
OBJETO VIRTUAL

IMAGEN REAL

NOTA

- El rayo que para por el foco, sino de o se va a infinito (o paralelo)
- El rayo que para por el centro de curvatura no se desvía.

AUMENTO



- $\frac{h}{R+S} = tg\,\gamma = \frac{h'}{S'-R}$

AUMENTO TRANSVERSAL o LATERAL $\equiv \boxed{\frac{h'}{h} = \frac{-S'+R}{S+R}} \equiv M_T$

Si $M_T < 0$ la imagen se invierte

$M_T > 0$ no lo hace.

- $\alpha \sim tg\,\alpha = \frac{a}{S}$
- $\alpha' \sim tg\,\alpha' = +\frac{a}{S'}$

} aprox. paraxial

AUMENTO ANGULAR $\equiv \boxed{M_\alpha \equiv \frac{\alpha'}{\alpha} = +\frac{S}{S'}}$

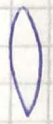
Relacionando ambos aumentos, llego a la RELACIÓN DE LAGRANGE - HELMHOLTZ

$$\boxed{h'n'\alpha' = h\,n\,\alpha}$$

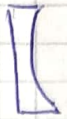
NOTA

LENTES

CONVEXAS

-  BICONVEXA
  $R_1 > 0$,
  $R_2 < 0$
-  PLANO-CONVEXA
  $R_1 = \infty$
  $R_2 < 0$
-  MENISCO-CONVEXA
  $R_1 > 0$
  $R_2 > R_1$

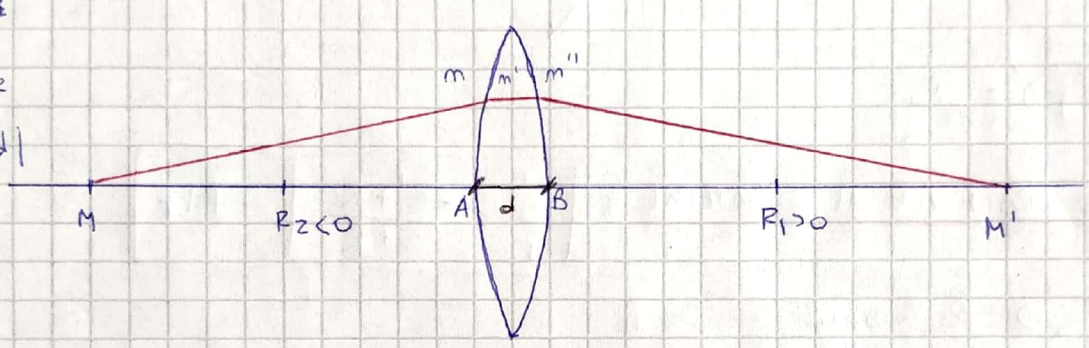
CÓNCAVAS

-  BICÓNCAVA
  $R_1 < 0$
  $R_2 > 0$
-  PLANO-CÓNCAVA
  $R_1 = \infty$
  $R_2 > 0$
-  MENISCO-CÓNCAVA
  $R_1 > R_2$
  $R_2 > 0$

$|MA| = S_1$

$|BM'| = S_2$

$|S_1'| = |S_2 + d|$



- DIOPTRA 1: $\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s_1'} = \frac{n' - n}{R_1}$
- DIOPTRA 2: $\frac{n'}{s_2} + \frac{n''}{s_2''} = \frac{n'' - n'}{R_2}$
- Tomo $d \to 0 \Rightarrow |s_1'| = |s_2|$ y sumo las dos ecuaciones.

$$\frac{n}{s_1} + \frac{n'}{s_1'} + \frac{n'}{s_2} + \frac{n''}{s_2''} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2}$$

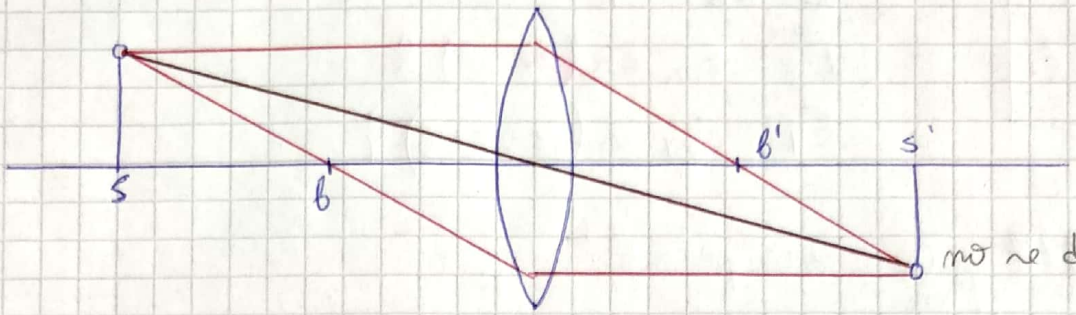
RENOMBRO:

$$\boxed{\frac{n}{s} + \frac{n''}{s'} = \frac{n' - n}{R_1} + \frac{n'' - n'}{R_2}}$$ ECUACIÓN DE LA LENTE

Si $n = n''$ (lente en un medio único)

$$n\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s'}\right) = (n' - n)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

NOTA



no se desvía.

- $b = \lim_{s' \to \infty} s \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{n'-n}{n}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$
- $b' = \lim_{s \to \infty} s' \Rightarrow \frac{1}{b'} = \frac{n'-n}{n}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

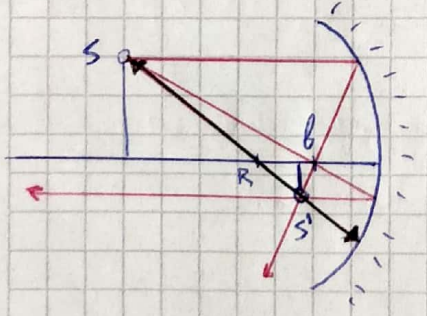
} Cuando $d \to \infty$, $b = b'$ ($n'' = n$)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{b}}$$ FÓRMULA GAUSSIANA PARA LAS LENTES.

ESPEJOS

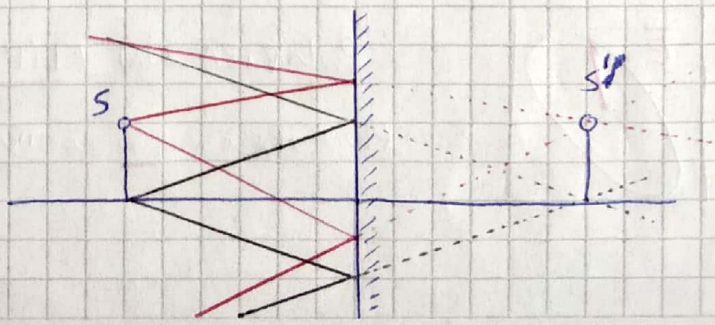
- Tomo $n' = -n$
- Como la luz rebota, el eje s' es positivo en el mismo sentido que S.

$$\Rightarrow \frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}}$$



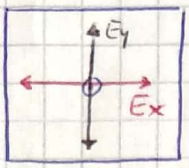
Si el espejo es plano, $R \to \infty$

- $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 0 \Rightarrow s = -s'$



NOTA

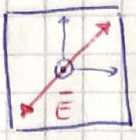
POLARIZACIÓN



$$\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y$$
$$\bar{E}_x = E_{ox} \cos(kz - \omega t)\,\hat{x}$$
$$\bar{E}_y = E_{oy} \cos(kz - \omega t + \varphi)\,\hat{y}$$

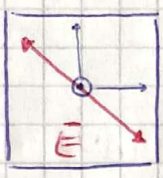
¿Cómo se comporta $\bar{E}$?

Si $\varphi = -2\pi, 0, 2\pi$



POLARIZACIÓN LINEAL

Si $\varphi = \pm\pi$

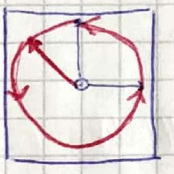


POLARIZACIÓN LINEAL

Según los valores E_{ox} y E_{oy}, cambia la orientación de la oscilación de $\bar{E}$.

Si $\varphi = \pm \pi/2$

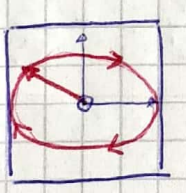
$E_{ox} = E_{oy}$



POLARIZACIÓN CIRCULAR

Si $\varphi = \pm \pi/2$

$E_{ox} \neq E_{oy}$

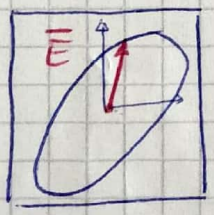


POLARIZACIÓN ELÍPTICA

ejes ppales centrados en $\hat{x}$ e $\hat{y}$.

En ambos casos, $\varphi = \pi/2$ hace girar el vector hacia la izquierda
$\varphi = -\pi/2$ " " " " " derecha.

CASO GENERAL



POLARIZACIÓN ELÍPTICA, CON SUS EJES PRINCIPALES NO CENTRADOS EN $\hat{x}$ e $\hat{y}$

NOTA

Como $\hat{x}$ e $\hat{y}$ son arbitrarios, una polarización general la puedo escribir como superposición de dos ondas polarizadas linealmente (base ortogonal).

También puedo usar la base "circular derecha - circular izquierda".

φ cualquiera:

$$\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y = E_{ox}\cos(kz-\omega t)\hat{x} + E_{oy}\cos(kz-\omega t+\varphi)\hat{y}$$

$$\frac{E_y}{E_{oy}} = \cos(kz-\omega t+\varphi) = \cos(kz-\omega t)\cos\varphi - \operatorname{sen}(kz-\omega t)\operatorname{sen}\varphi =$$

$$= \frac{E_x}{E_{ox}}\cos\varphi - \sqrt{1-\cos^2(kz-\omega t)}\cdot\operatorname{sen}\varphi = \frac{E_x}{E_{ox}}\cos\varphi - \sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2}\operatorname{sen}\varphi$$

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}} - \frac{E_x}{E_{ox}}\cos\varphi\right)^2 = \left(-\sqrt{1-\cos^2(kz-\omega t)}\operatorname{sen}\varphi\right)^2$$

($\sqrt{1-\cos^2(kz-\omega t)} = \frac{E_x}{E_{ox}}$)

$$\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\cos\varphi\right)^2 - 2\frac{E_y E_x}{E_{oy}E_{ox}}\cos\varphi = \left(1-\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2\right)\operatorname{sen}^2\varphi$$

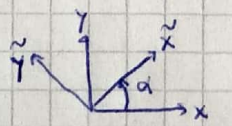
$$\boxed{\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 - \frac{2E_xE_y}{E_{ox}E_{oy}}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi}$$

ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA ELIPSE EN EL PLANO (E_x, E_y)

- En la luz natural, o no polarizada, se engancharán trenecitos de ondas de la misma frecuencia pero distinta fase.
- Cada tren durará unos 10^{-8} segundos.
- Se puede decir que no hay patrón de relación, salvo que $\langle\varphi\rangle_t = 0$

- Notación matricial: $\bar{E}(z,t) = \begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy}e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$

- Rotar α positivo:



$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

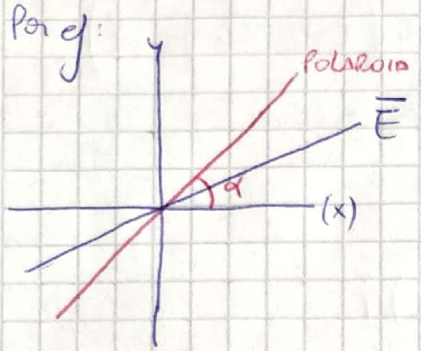
$R(\alpha)$

NOTA

POLARIZADOR

Dispositivo que deja pasar solo la componente paralela a su eje de transmisión.

Por ej:



$$\bar{E}_{OUT} = R(-\alpha)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}R(\alpha)\cdot\bar{E}_{IN}$$

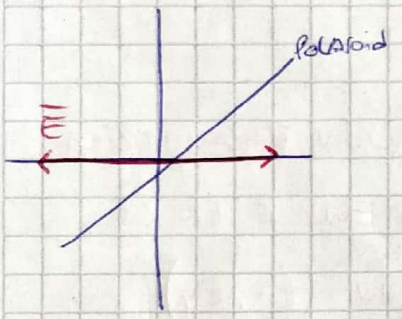
- $R(-\alpha)$: vuelvo a mi sistema (x,y)
- $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: aplico
- $R(\alpha)$: voy al sistema polaroid

¿Qué intensidad sale de un polarizador si le aplico a una fuente real?

$$I = \langle |\bar{S}| \rangle_\tau \sim \langle |\bar{E}|^2 \rangle_\tau = \frac{1}{T}\int_0^T |\bar{E}|^2 d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \left(E_{ox}^2\cos^2(kz-\omega\tau) + E_{oy}^2\cos(kz-\omega\tau+\varphi)\right)d\tau$$

$$\Rightarrow I = \frac{E_{ox}^2 + E_{oy}^2}{2} = \boxed{\frac{\bar{E}\cdot\bar{E}^*}{2} = I}$$

($\bar{E}^*$: conjugado)



$$\bar{E}_{OUT\,(Pol)} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}R(\alpha)\begin{pmatrix}E_o\\ 0\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega\tau)}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot E_o\\ -\operatorname{sen}\alpha\cdot E_o\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega\tau)}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cdot E_o\\ 0\end{pmatrix}e^{i(kz-\omega\tau)}$$

$$\Rightarrow I_{OUT} = \frac{\bar{E}_{OUT}\cdot\bar{E}_{OUT}^*}{2} = \boxed{\frac{E_o^2\cos^2\alpha}{2} = I_{OUT}}$$

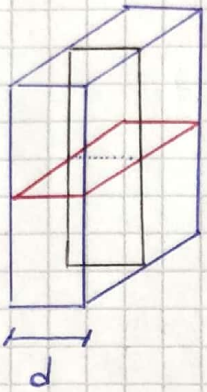
$$\boxed{I_{IN}\cdot\cos^2\alpha = I_{OUT}}$$

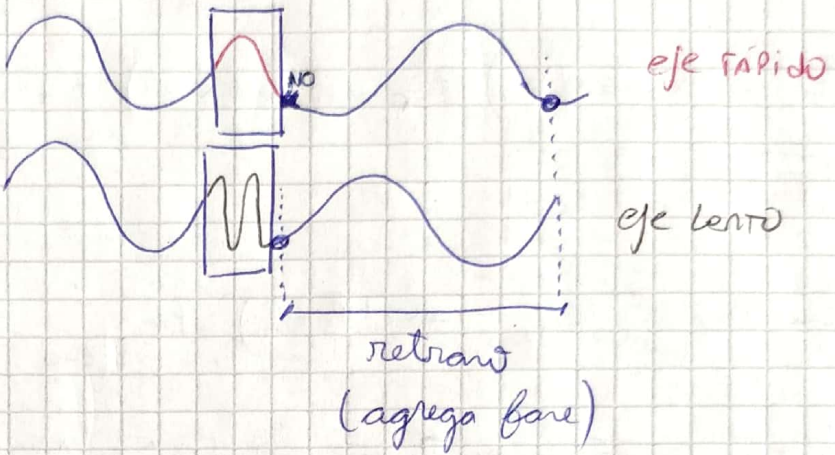
LEY DE MALUS

NOTA

BIRREFRINGENCIA

Se produce cuando tengo materiales anisótropos (tienen direcciones privilegiadas). Un ejemplo son las láminas de un cuarto y un medio de onda.





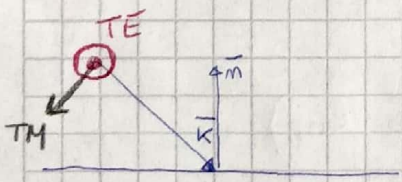
$$c\left(\Delta t_{-} - \Delta t_{+}\right) = \varphi \qquad (\text{tiempo})$$

$$c\left(\frac{d}{N_{-}} - \frac{d}{N_{+}}\right) = \varphi$$

$$d\left(\frac{c}{N_{-}} - \frac{c}{N_{+}}\right) = \varphi$$

$$d\left(n_{-} - n_{+}\right) = \varphi \longrightarrow \text{la fase agregada depende del camino óptico.}$$

Defino:



DIRECCIÓN TRANSVERSO-MAGNÉTICA $(\vec{E}_{\perp})$

DIRECCIÓN TRANSVERSO-ELÉCTRICA $(\vec{E}_{//})$

Estas direcciones se conservan en la reflexión y transmisión en un medio isótropo.

Si incide $\begin{cases} TE \\ TM \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{reflejada} \\ \text{transmitida} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} TE \\ TM \end{cases}$

NOTA

Suponga un campo incidente transversoeléctrico.

$\Rightarrow$ • $\bar{E}_i = E_{oi}\hat{y}\cos(\bar{k}_i\cdot\bar{r}-\omega t)$, con $\bar{k}_i = k\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} - k\cos\theta\,\hat{z}$

• $\bar{E}_r = E_{or}\hat{y}\cos(\bar{k}_r\cdot\bar{r}-\omega t)$, con $\bar{k}_r = k\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} + k\cos\theta\,\hat{z}$

• $\bar{E}_t = E_{ot}\hat{y}\cos(\bar{k}_t\cdot\bar{r}-\omega t)$, con $\bar{k}_t = k\operatorname{sen}\theta\,\hat{x} - k'\cos\theta'\,\hat{z}$

$k = n_1\frac{\omega}{c}$

$k' = n_2\frac{\omega}{c}$

Sigue que $\bar{E}_{1//} = \bar{E}_{2//}\big|_{sup\ z=0} \Rightarrow \left(\bar{E}_i + \bar{E}_r\right)_{//} = \bar{E}_{t//}\big|_{z=0}$

$\Rightarrow E_{oi}\cos(k\operatorname{sen}\theta x - \omega t) + E_{or}\cos(k\operatorname{sen}\theta x - \omega t) = E_{ot}\cos(k\operatorname{sen}\theta\cdot x - \omega t)$

$\Rightarrow \boxed{E_{oi} + E_{or} = E_{ot}}$

Sigue que $B_{1//}\big|_{z=0} = B_{2//}\big|_{z=0} \Rightarrow \left(\bar{B}_i + \bar{B}_r\right)_{//}\big|_{z=0} = B_{t//}\big|_{z=0}$

$\bar{B}_i = \bar{k}_i\cdot\frac{c}{\omega}\times\bar{E}_i = \frac{n_1}{\|\bar{k}_i\|}\hat{k}_0\times\bar{E}_i = \frac{n_1}{\|k_i\|}\left(k_x\hat{x} + k_z\hat{z}\right)\times\hat{y}\,E_0\cos\left(\bar{k}_i\cdot\bar{r}-\omega t\right)$

$\Rightarrow \bar{B}_i = \frac{n_1}{\|k_i\|}\left(k_x'\hat{z} - k_z'\hat{x}\right)E_0\cos\left(\bar{k}_i\cdot\bar{r}-\omega t\right)$

$\Rightarrow \bar{B}_{i//}\big|_{z=0} = n_1\cos\theta\,E_0\cos(k_x x - \omega t)$

$\bar{B}_r = \frac{n_1}{\|\bar{k}_r\|}\bar{k}_r\times\bar{E}_r \Rightarrow \bar{B}_{r//}\big|_{z=0} = n_1\cos\theta\,E_{or}\cos(k_x\cdot x - \omega t)$

$\bar{B}_t = \frac{n_2}{\|k_t\|}\bar{k}_t\times\bar{E}_t \Rightarrow \bar{B}_{t//}\big|_{z=0} = n_2\cos\theta'\cdot E_{ot}\cos(k_x\cdot x - \omega t)$

$\Rightarrow \bar{B}_{i//}\big|_{z=0} + \bar{B}_{r//}\big|_{z=0} = \bar{B}_{t//}\big|_{z=0}$

$n_1\cos\theta\cdot E_{oi} - n_1\cos\theta\,E_{or} = n_2\cos\theta'\,E_{ot} = n_2\cos\theta'\left(E_{oi} + E_{or}\right)$

$\Rightarrow \boxed{R_{TE} = \frac{E_{or}}{E_{oi}} = \frac{n_1\cos\theta - n_2\cos\theta'}{n_1\cos\theta + n_2\cos\theta'}}$

$\boxed{T_{TE} = \frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \frac{2n_1\cos\theta}{n_1\cos\theta + n_2\cos\theta'}}$

COEFICIENTES DE FRESNEL

NOTA

Empezando desde el magnético, para un campo transmermomagnético.

$$R_{TM} = \frac{B_{or}}{B_{oi}} = \frac{n_2 \cos\theta - n_1 \cos\theta'}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta'}$$

$$T_{TM} = \frac{B_{ot}}{B_{oi}} = \frac{2 n_2 \cos\theta}{n_2 \cos\theta + n_1 \cos\theta'}$$

- $R_{TM} = \frac{B_{or}}{B_{oi}} = \frac{n_1 |\bar{E}_r|}{n_1 |\bar{E}_i|} = \frac{|\bar{E}_r|}{|\bar{E}_i|}$

- $T_{TM} = \frac{B_{ot}}{B_{oi}} = \frac{n_2 |\bar{E}_t|}{n_1 |\bar{E}_i|} = \frac{n_2}{\mu_1} \frac{|\bar{E}_t|}{|\bar{E}_i|}$

En la interfaz puede producirse un cambio de fase:
o elimino TE o TM, o compenso las fases
↳ $R_{TE}, T_{TE}, R_{TM}, T_{TM} \in \mathbb{C}$!

$n = n_a + i n_b$
↳ en dieléctricos, $n_b \ll 1$

Supongo $n_1, n_2 \in \mathbb{R}$
Como no puedo cambiar la fase, mato alguna componente.

T_{TE} y $T_{TM} \neq 0$.

$$R_{TE} = 0 \iff n_1 \cos\theta = n_2 \cos\theta'$$

$$n_1^2 \cos^2\theta = n_2^2 \cos^2\theta'$$

$$n_1^2 (1 - \operatorname{sen}^2\theta) = n_2^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$R_{TE} = 0 \iff n_1 = n_2$$

→ distintos materiales con distinto n no reflejan TE

$$R_{TM} = 0 \iff n_2 \cos\theta = n_1 \cos\theta'$$

$$n_2^2 \cos^2\theta = n_1^2 \cos^2\theta'$$

$$n_2^2 (1 - \operatorname{sen}^2\theta) = n_1^2 \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$R_{TM} = 0 \iff \operatorname{sen}^2\theta = \frac{n_2^2}{n_1^2 + n_2^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{n_2}{n_1}$$

ÁNGULO DE BREWSTER

NOTA

INTERFERENCIA

Superposición de dos fuentes puntuales que emiten ondas esféricas o cilíndricas de la misma frecuencia. Además, necesito que el haz sea coherente (mantenga la fase). Como esto último no es posible, divido una fuente en dos, de manera que los cambios de fase resulten igual para ambas.

- SUPERPOSICIÓN: $\bar{E}_{tot} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 = \bar{E}_{01} e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{r} - \omega t)} + \bar{E}_{02} e^{i(\bar{k}_2 \cdot \bar{r} - \omega t)}$

- INTENSIDAD = $I = \langle \bar{E}^2 \rangle_\tau = \frac{1}{2} Re(A \cdot B^*) = \frac{1}{2} Re(\bar{E} \cdot \bar{E}^*)$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} Re(\bar{E}_{tot} \cdot \bar{E}_{tot}^*) = \frac{1}{2} Re\left[(\bar{E}_1 + \bar{E}_2)(\bar{E}_1^* + \bar{E}_2^*)\right]$$

$$I = \frac{1}{2} Re\left[\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_1^* + \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_2^* + \bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^* + \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_1^*\right]$$

$$I = \frac{1}{2} E_{01}^2 + \frac{1}{2} E_{02}^2 + \frac{1}{2} Re\left(\bar{E}_1 \bar{E}_2^* + \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_1^*\right)$$

- $\boxed{I = I_1 + I_2 + I_{12}}$

$$I_{12} = \frac{1}{2} Re\left(\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^* + \bar{E}_2 \cdot \bar{E}_1^*\right) = \frac{1}{2} Re\left[\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^* + (\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^*)^*\right] = \frac{1}{2} Re\left[2 \cdot Re(\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^*)\right]$$

$$I_{12} = Re(\bar{E}_1 \cdot \bar{E}_2^*) = Re\left[\bar{E}_{01} \cdot \bar{E}_{02}^* \cdot e^{i(\bar{k}_1 \cdot \bar{r} - \omega t)} e^{-i(\bar{k}_2 \cdot \bar{r} - \omega t)}\right] = Re\left[\bar{E}_{01} \bar{E}_{02}^* e^{i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}}\right]$$

→ Como considero el campo lejano, $\bar{E}_{01}$ y $\bar{E}_{02}$ son los de una onda plana.

- $\bar{E}_{01} = \mathcal{E}_{01} \hat{e}_1$
- $\bar{E}_{02} = \mathcal{E}_{02} \hat{e}_2 e^{i\varphi}$ → dif de fase e/ polarizaciones
  → conjugo

$$\Rightarrow I_{12} = Re\left[\mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 \cdot e^{-i\varphi} e^{i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r}}\right] = \mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02} \cos\alpha \cdot Re\left[e^{i\left[(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r} - \varphi\right]}\right]$$

$$I_{12} = \mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02} \cos\alpha \cos\left[(\bar{k}_1 - \bar{k}_2) \cdot \bar{r} - \varphi\right]$$

NOTA

CASOS:

- $\bar{E}_1 \perp \bar{E}_2 \Rightarrow \hat{e}_1 \perp \hat{e}_2 \Rightarrow \cos\alpha = 0 \Rightarrow I_{12} = 0$

$\Rightarrow$ Si los campos son perpendiculares, no interfieren entre sí.

- $\bar{E}_1 \parallel \bar{E}_2 \Rightarrow \cos\alpha = 1 \Rightarrow I_{12} = \mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}\cos\left[(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\cdot\bar{r} - \varphi\right]$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\delta(\bar{r})\right)}, \text{ con } \delta(\bar{r}) = (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\cdot\bar{r} - \varphi$$

- $0 < \cos\delta < 1$ INTERFERENCIA CONSTRUCTIVA
- $-1 < \cos\delta < 0$ INTERFERENCIA DESTRUCTIVA

- $0 \leq I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \leq I \leq I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$

- Si hubiéramos usado luz natural (incoherente),

$$\left\langle \mathrm{Re}\left[e^{i\left((\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\cdot\bar{r} + \varphi(t)\right)}\right]\right\rangle_t = \mathrm{Re}\left[e^{i(\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\bar{r}} \underbrace{\left\langle e^{i\varphi(t)}\right\rangle_t}_{=0}\right]$$

$\Rightarrow$ la luz natural no interfiere.

$$\delta(\bar{r}) = (\bar{k}_1 - \bar{k}_2)\cdot\bar{r} - \varphi = k_1 r_1 - k_2 r_2 - \varphi = k(r_1 - r_2) - \varphi$$

(usamos λ)

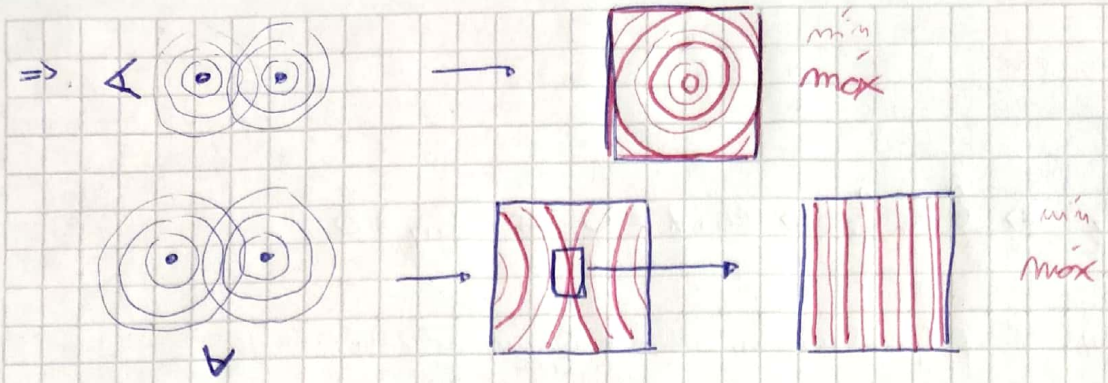
$\Rightarrow \cos(\delta(\bar{r})) = \cos(\text{dif de camino óptico})$

¿Qué puntos tienen $I_{máx}$ o $I_{mín}$?



hiperboloides.

NOTA

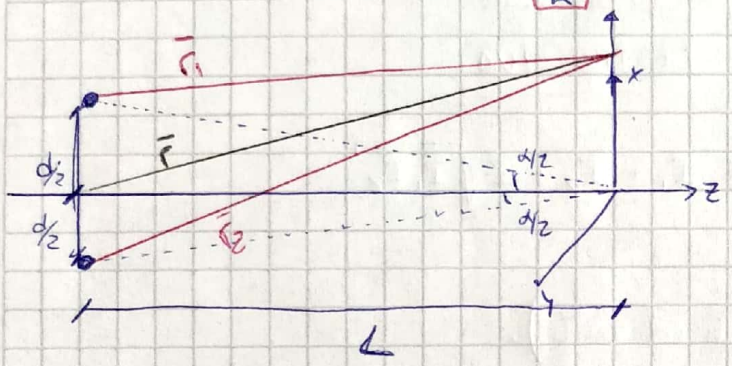


Los puntos de intensidad máxima cumplen que $\delta = 2m\pi = k_0(r_1 - r_2) - \varphi$

Los " " " mínima " " $\delta = (2m+1)\pi = k(r_1 - r_2) - \varphi$

$\Rightarrow$ en $I_{máx}$: $r_1 - r_2 = \dfrac{2m\pi + \varphi}{k}$

en $I_{mín}$: $r_1 - r_2 = \dfrac{(2m+1)\pi + \varphi}{k}$



APROX. PARAXIAL

$L \gg d$

$L^2 \gg x^2 + y^2$

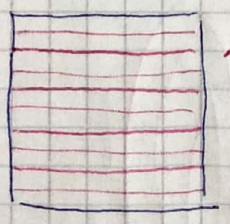
$\Rightarrow |\bar{r}_1| = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2} \sim L + \dfrac{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{2L}$

$|\bar{r}_2| = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + L^2} \sim L + \dfrac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{2L}$

$\Big\} r_1 - r_2 = -\dfrac{xd}{L}$

en $I_{máx}$, $r_1 - r_2 = \dfrac{(2m\pi + \varphi)}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \dfrac{-xd}{L} \Rightarrow x_{máx} = \dfrac{m\lambda L}{d}$ $\quad \boxed{\varphi = 0}$

en $I_{mín}$, $r_1 - r_2 = \dfrac{(2m+1)\pi + \varphi}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \dfrac{xd}{L} \Rightarrow x_{mín} = \dfrac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda L}{d}$



$$\boxed{\Delta_{máx} = x_{máx}(m+1) - x_{máx}(m) = \frac{\lambda L}{D}}$$

INTERFRANJA.

CONTRASTE: $\dfrac{I_{máx} - I_{mín}}{I_{máx} + I_{mín}}$

NOTA

~~INTERFERÓMETRO POR DIVISIÓN DE AMPLITUD~~.

INTERFERENCIA DE DOS FUENTES CASI MONOCROMÁTICAS

- $\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}$
- $\omega_2 = \bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}$

$$\bar{k}_1 \cdot \bar{r} - \omega_1 t = \left(-\frac{1}{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot y - t\right)\omega_1$$

$$\bar{k}_2 \cdot \bar{r} - \omega_2 t + \Delta\phi = \left(\frac{1}{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) y - t\right)\omega_2 + \Delta\phi$$

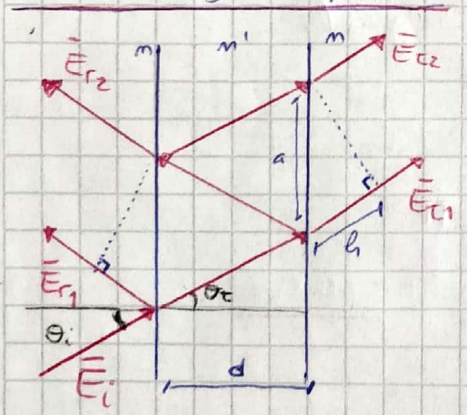
$$f = \left(\bar{k}_1 \cdot \bar{r} - \omega_1 t\right) - \left(\bar{k}_2 \cdot \bar{r} - \omega_2 t + \Delta\phi\right) = -\frac{1}{v}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) y\,(\omega_1 + \omega_2) - t(\omega_1 - \omega_2) - \Delta\phi$$

$$f = -\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) y\,\bar{\omega}}{v} - t\,\Delta\omega - \Delta\phi = -\underbrace{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) y\,\bar{k}}_{\text{propagativo}} - t\cdot\Delta\omega - \Delta\phi$$

⇒ A medida que aumenta la diferencia entre ω_1 y ω_2, más varía el patrón.

→ lo que me interesa es el $f(\bar{r})$.

DIVISIÓN DE AMPLITUD



$$\bar{E}_{r_1} = r\,e^{i\pi}\,\bar{E}_i \cdot e^{i\theta_1}$$

$$\bar{E}_{r2} = t\,r'\,t'\,e^{i2\phi}\,\bar{E}_i$$

$$\bar{E}_{t1} = t\,t'\,\bar{E}_i\,e^{i\phi}\,e^{i\theta_2}$$

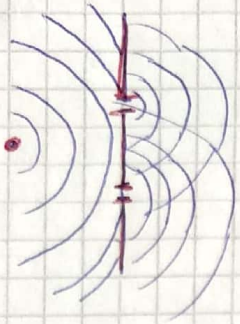
$$\bar{E}_{t2} = t\,r'\,r'\,t'\,e^{i3\phi}$$

$$\phi = n'd\cos\theta_t \cdot k_0$$

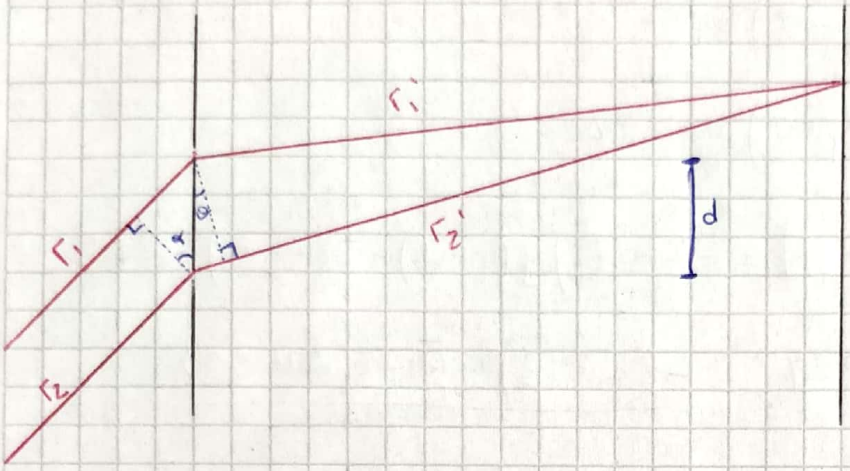
$$\theta_1 = \theta_2 = k_0 n \cdot h = \frac{n\cdot k_0}{\operatorname{sen}\theta_t} \cdot a = \operatorname{sen}\theta_t \cdot 2\left(d\cdot\operatorname{tg}\theta_t\right)\cdot n\cdot k_0$$

NOTA

DIVISIÓN DE FRENTE DE ONDA



INTERFERÓMETRO DE YOUNG.

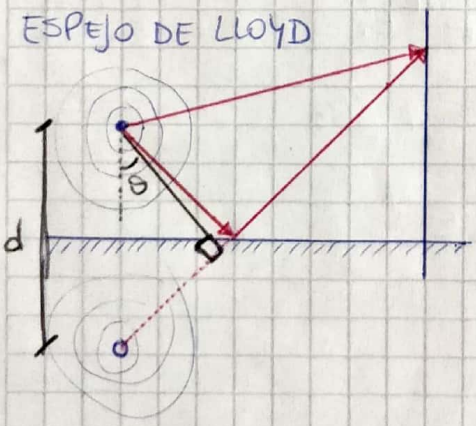


$$\Delta\varphi = k\left(r_2' - r_1'\right) - k\left(r_1 - r_2\right) = kd\,\mathrm{sen}\,\theta - kd\,\mathrm{sen}\,\alpha = kd\left(\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\alpha\right)$$

Como $I_{max} \Leftrightarrow \Delta\varphi = 2m\pi$

$\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\alpha = \frac{m\lambda}{d}$ ⟶ El pico principal ($m=0$) se ubica siguiendo la dirección del haz original.

ESPEJO DE LLOYD



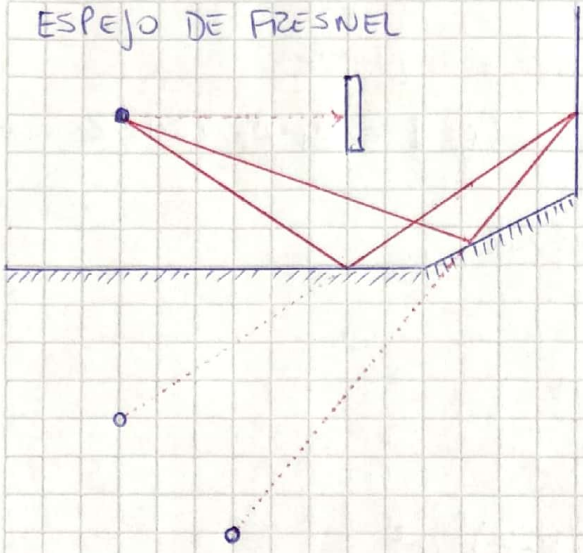
$$\Delta\varphi = mk_0\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot d + \pi$$

Young ↳ reflexión



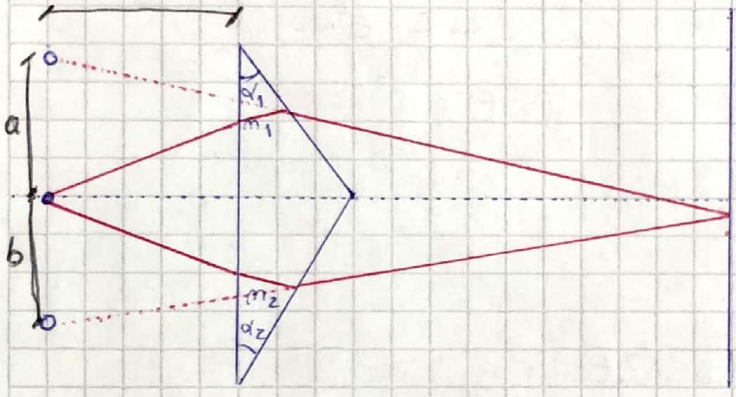
NOTA

ESPEJO DE FRESNEL

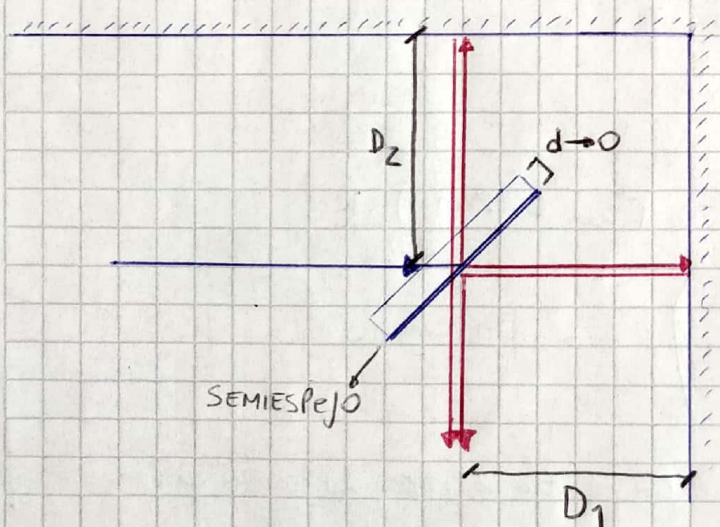


Dos espejos: reflejan un rayo de luz.

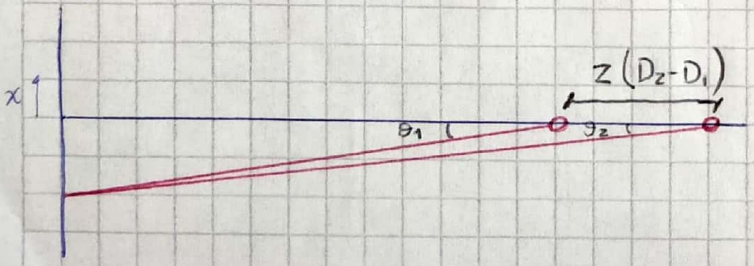
BIPRISMA DE FRESNEL



MICHELSON



cambio de fase π por tener el semiespejo vidrio delante y aire detrás.

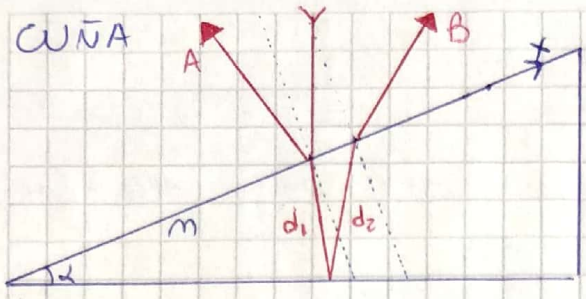


Si $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$

$$\delta = zK(D_2 - D_1)\cos\vartheta + \pi$$

NOTA

CUÑA



28/4/14

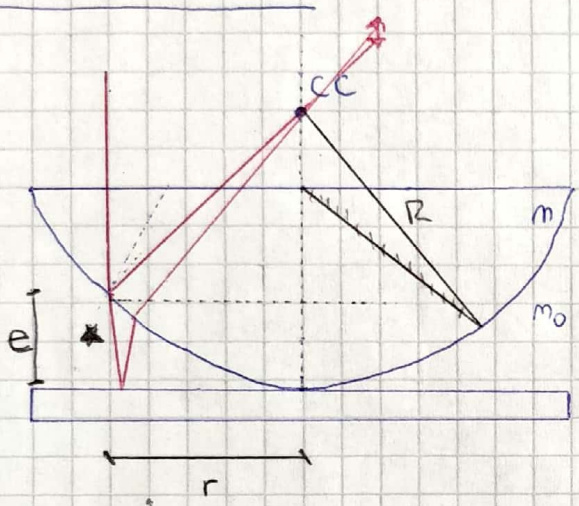
* π de fase por reflexión

Considero $\alpha << 1 \Rightarrow d_1 + d_2 \approx 2d \approx 2x \cdot \text{sen}\,\alpha$

$\Rightarrow \Delta\varphi = 2x\alpha$

$\Rightarrow \varphi = 2m k_0 x\alpha + \pi$

ANILLOS DE NEWTON



$R^2 = (R-e)^2 + r^2$

$e^2 = 2Re - r^2$

Si $e << R$, $e^2 \approx 0$

$\Rightarrow e = \frac{r^2}{2R}$

Si considero * muy poco reparador, $\Delta\varphi = 2e = \frac{r^2}{R}$

$\Rightarrow$ Si agrego que se produce un salto de fase π,

$$\Delta\varphi = \frac{k_0 m_0 r^2}{R} + \pi$$

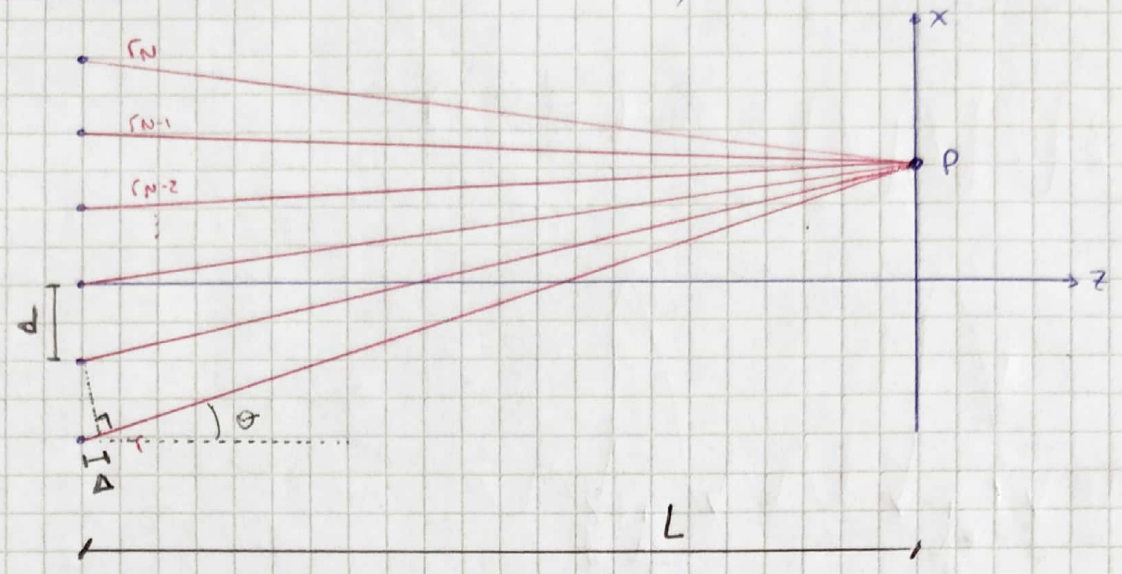
$$\Delta\varphi_{máx} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{m_0 r_{máx}^2}{R} + \pi = 2m\pi \Rightarrow r_{máx}^2 = \frac{(2m-1)\lambda R}{2m_0}$$

$$\Rightarrow \Delta_{máx} = \sqrt{\frac{\lambda R}{2m_0}}\left(\sqrt{2m+1} - \sqrt{2m-1}\right) \rightarrow \text{NO Lineal}$$

Cuando me alejo del centro, los anillos se van acercando entre sí.

NOTA

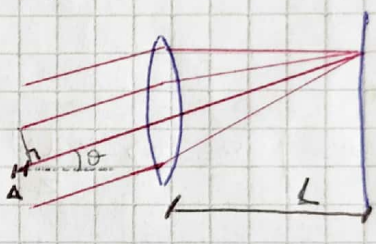
N FUENTES (monocromáticas, coherentes)



Polarizadas linealmente $\hat{y}$

$$\bar{E}_m(\bar{r},t) = E_0(r_m)\hat{y}\, e^{i(kr_m - \omega t)}, \quad \text{pero } E_0(r_m) \sim \frac{1}{r_m}. \text{ Como } r_m \to \infty,\ E_0(r_i) = E_0(r_j) = E_0$$

(onda, onda prácticamente plana)



$$\Rightarrow \bar{E}(\bar{r},t) = E_0(r)\hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)} + \ldots + E_0(r)\hat{y}\, e^{i(kr_N-\omega t)}$$

$$= E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)}\left[1 + e^{ik(r_2-r_1)} + \ldots + e^{ik(r_N-r_1)}\right]$$

$$= E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)}\left[1 + e^{ik\Delta} + e^{i2k\Delta} + \ldots + e^{ik(N-1)\Delta}\right]$$

→ SERIE GEOMÉTRICA

$$= E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)} \cdot \sum_{J=0}^{N-1} \left(e^{ik\Delta}\right)^J = E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)} \cdot \frac{\left(e^{ikN\Delta} - 1\right)}{e^{ik\Delta} - 1}$$

$$= E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)} \cdot \frac{e^{i\frac{kN\Delta}{2}}}{e^{i\frac{k\Delta}{2}}} \left[\frac{e^{i\frac{kN\Delta}{2}} - e^{-i\frac{kN\Delta}{2}}}{e^{i\frac{k\Delta}{2}} - e^{-i\frac{k\Delta}{2}}}\right]$$

$$= E_0 \hat{y}\, e^{i(kr_1-\omega t)}\, e^{i\frac{k\Delta(N-1)}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kN\Delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{k\Delta}{2}\right)}$$

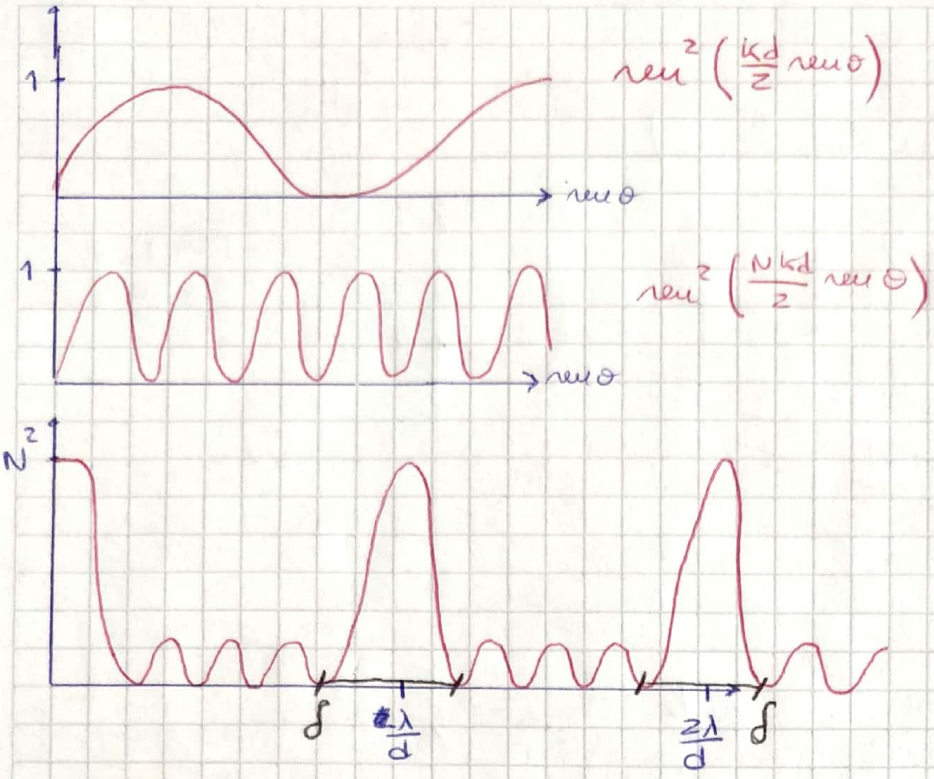
$$I = \left\langle \bar{E}(r,t), \bar{E}^*(r,t) \right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\bar{E}\cdot\bar{E}^*\right)$$

$$I = \frac{E_0^2}{2} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{kN\Delta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\Delta}{2}\right)} \Rightarrow$$

$\Delta = d \operatorname{sen}\theta$

$$\boxed{I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{NKd\operatorname{sen}\theta}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{Kd\operatorname{sen}\theta}{2}\right)}}$$

NOTA



máximos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}\operatorname{sen}\theta\right)=0 \Rightarrow \frac{kd\operatorname{sen}\theta}{2}=m\pi \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta_{máx}=\frac{m\lambda}{d}}$$

ceros:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{kdN}{2}\operatorname{sen}\theta\right)=0 \Rightarrow \frac{kdN}{2}\operatorname{sen}\theta=j\pi \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta_{mín}=\frac{j\lambda}{dN}} \quad \left(\text{salvo } \frac{j}{N}=m\right)$$

$\delta = \operatorname{sen}\theta_{mín} - \operatorname{sen}\theta_{mín\ anterior}$ alrededor de un máximo $\div 2$. (separación entre mínimos)

$$\delta = 2\cdot\left[\frac{(j+1)\lambda}{dN}-\frac{j\lambda}{dN}\right] = \boxed{\frac{2\lambda}{dN}=\delta}$$ Ancho de LÍNEA ESPECTRAL

⇒ Entre máximos tengo [N-1 ceros ; N-2 máx. secundarios]

¿Cuántos máx tengo? $\operatorname{sen}\theta_{máx}=\frac{m\lambda}{d}$

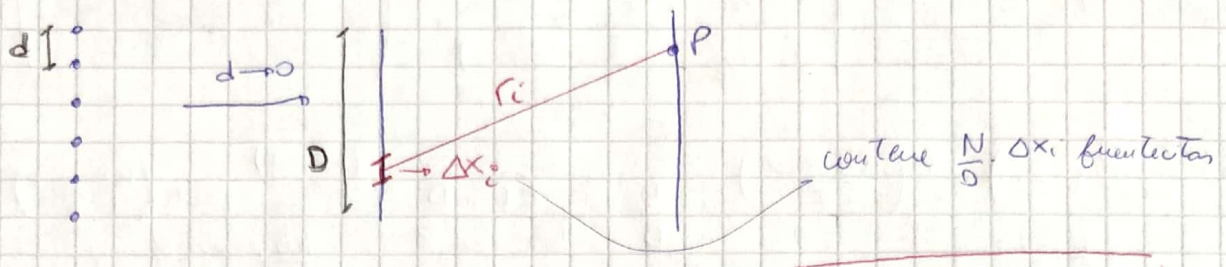
pero $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

$-1 \le \operatorname{sen}\theta \le 1$

$-1 \le \frac{m\lambda}{d} \le 1 \longrightarrow \boxed{-\frac{d}{\lambda} \le m \le \frac{d}{\lambda}}$ tengo acotados máximos.

NOTA

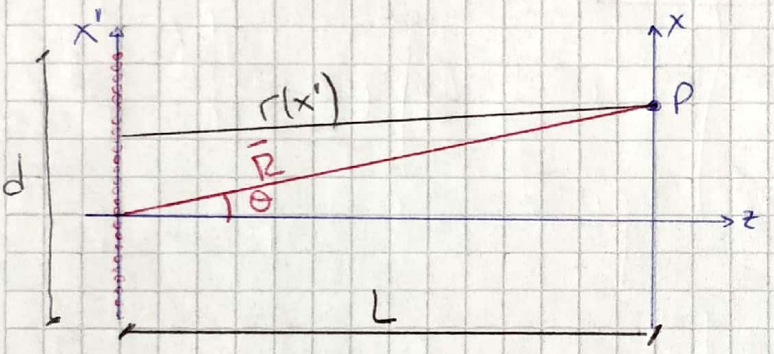
DIFRACCIÓN



$$E_i = \frac{\mathcal{E}_0}{r_i} e^{i(kr_i-\omega t)} \cdot \frac{N}{D}\Delta x_i \longrightarrow \text{Defino } \boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{D}\lim_{N\to\infty} \mathcal{E}_0 N}$$

$$E_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} e^{i(kr_i-\omega t)} \cdot \Delta x_i$$

$\Delta x_i \to dx$, $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $E_{TOT} = \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{r(x')} e^{i(kr-\omega t)} dx'$



$\bar{R} = X\hat{x} + L\hat{z}$

$L \gg D$ (campo lejano)

$\bar{r} = \bar{R} - x'\hat{x}$

$r^2 = R^2 + x'^2 - 2\bar{R}x'\hat{x} = R^2 + x'^2 - 2xx' = R^2 + x'^2 - 2R\,\text{sen}\,\theta\cdot x'$

$r = \sqrt{R^2 + x'^2 - 2x'R\,\text{sen}\,\theta} = R\sqrt{1 + \left(\frac{x'}{R}\right)^2 - 2\frac{x'}{R}\,\text{sen}\,\theta}$ $\quad \frac{x'}{R} \ll 1 \to$ Taylor

$$\boxed{r \sim R\left(1 - \frac{x'}{R}\,\text{sen}\,\theta\right)}$$ APROX. LINEAL DE FRAUNHOFER

$\frac{1}{r} \sim \frac{1}{R}$ $\Rightarrow$ vuelvo a $\bar{E}_{TOT}$ ∪

NOTA

$$E_{TOT}(R) = \frac{\mathcal{E}_L}{R}\int_{-D/2}^{D/2} e^{i(kR-\omega t)}\, e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\, dx' = \frac{\mathcal{E}_L}{R}\, e^{i(kR-\omega t)}\int_{-D/2}^{D/2} e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\, dx'$$

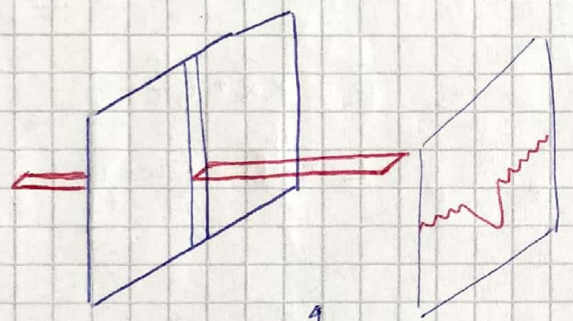
$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R}\, e^{i(kR-\omega t)}\cdot \left.\frac{e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}}{-ik\operatorname{sen}\theta}\right|_{x'=-D/2}^{x'=D/2} = \frac{\mathcal{E}_L\, e^{i(kR-\omega t)}}{R(-ik\operatorname{sen}\theta)}\cdot\left(e^{-ik\frac{D}{2}\operatorname{sen}\theta} - e^{ik\frac{D}{2}\operatorname{sen}\theta}\right)$$

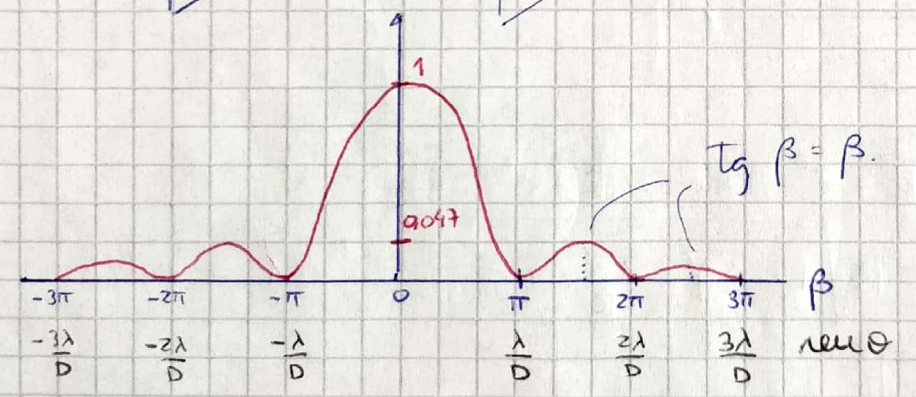
$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R}\, e^{i(kR-\omega t)}\,\frac{(-2i)\operatorname{sen}\left(k\frac{D}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{-ik\operatorname{sen}\theta}\cdot\frac{D}{D} = \frac{\mathcal{E}_L\cdot D\cdot e^{i(kR-\omega t)}}{R}\,\frac{\operatorname{sen}\left(k\frac{D}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{k\frac{D}{2}\operatorname{sen}\theta}$$

$\Rightarrow$ Si $kD\operatorname{sen}\theta = \beta$, $E_{TOT} = \frac{\mathcal{E}_L D}{R}\, e^{i(kR-\omega t)}\cdot \operatorname{senc}(\beta)$

$\Rightarrow I(\beta) = \frac{\mathcal{E}_L^2 D^2}{R^2}\operatorname{senc}^2(\beta)$

Si: $\frac{\mathcal{E}_L^2 D^2}{R^2} = I_0$, $\boxed{I(\beta) = I_0\operatorname{senc}^2(\beta)}$





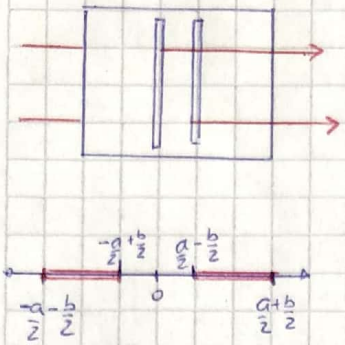
ancho del pico grande: $\frac{2\lambda}{D}$ $\Rightarrow$ Si achico la ranura, se agranda el pico

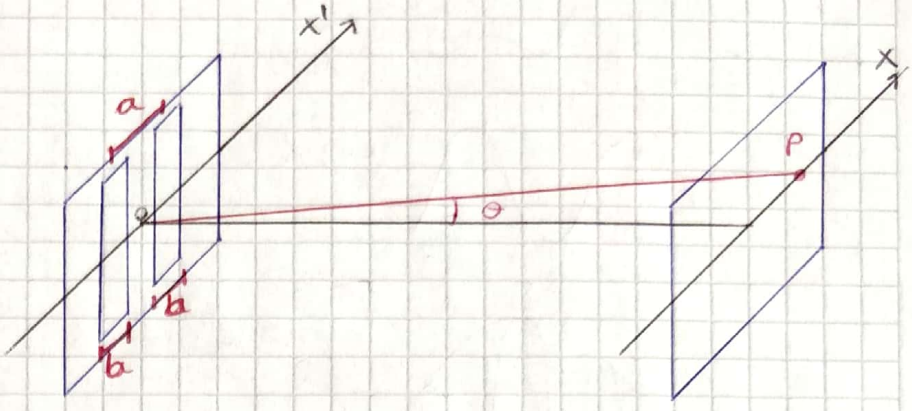
picos en $\beta = \frac{kD}{2}\operatorname{sen}\theta = m\pi \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda m}{D} < 1 \Rightarrow m < \frac{D}{\lambda}$

Pero al ser tan pequeños ($m=1$ es un 5% de $m=0$), los pierdo de vista antes (al menos a ojo desnudo).

NOTA

DOBLE RENDIJA





$$E_{TOT} = \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \int e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\, dx' = \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left[\int_{-\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}} e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\, dx' + \int_{\frac{a}{2}-\frac{b}{2}}^{\frac{a}{2}+\frac{b}{2}} e^{-ikx'\operatorname{sen}\theta}\, dx' \right]$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \frac{1}{-ik\operatorname{sen}\theta} \left[e^{-ik\operatorname{sen}\theta\left(-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)} - e^{-ik\operatorname{sen}\theta\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)} + e^{-ik\operatorname{sen}\theta\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\right)} - e^{-ik\operatorname{sen}\theta\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \frac{1}{-ik\operatorname{sen}\theta} \left[e^{+ik\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{a}{2}} \left(e^{-ik\operatorname{sen}\theta\frac{b}{2}} - e^{+ik\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{b}{2}} \right) + e^{-ik\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{a}{2}} \left(e^{-ik\operatorname{sen}\theta\frac{b}{2}} - e^{+ik\operatorname{sen}\theta\frac{b}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot \frac{1}{-ik\operatorname{sen}\theta} \left[\left(-2i\operatorname{sen}\left(\frac{kb\operatorname{sen}\theta}{2}\right) \right) \cdot \left(e^{+ik\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{a}{2}} + e^{-ik\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{a}{2}} \right) \right] \cdot \frac{b}{b}$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot b \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kb\operatorname{sen}\theta}{2}\right)}{\frac{kb\operatorname{sen}\theta}{2}} \cdot \left(2\cos\left(k\operatorname{sen}\theta\cdot\frac{a}{2}\right) \right)$$

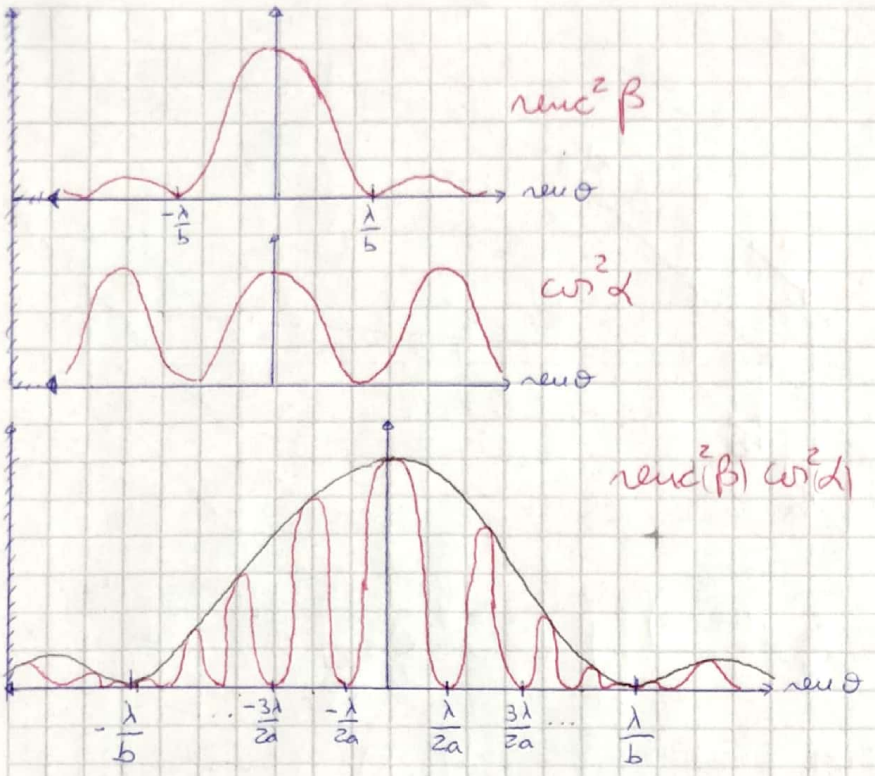
$$= \frac{2E_L b}{R} e^{i(kR-\omega t)} \operatorname{senc}\left(\frac{kb\operatorname{sen}\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{ka\operatorname{sen}\theta}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Si
- $\frac{4E_L^2 b^2}{R^2} = I_0$
- $\frac{kb\operatorname{sen}\theta}{2} = \beta$
- $\frac{ka\operatorname{sen}\theta}{2} = \alpha$

$$I = I_0 \operatorname{senc}^2(\beta) \cos^2(\alpha)$$

- $\operatorname{senc}^2(\beta)$ → PATRÓN DE DIFRACCIÓN
- $\cos^2(\alpha)$ → PATRÓN DE INTERF. c/ 2 FUENTES PUNTUALES

NOTA

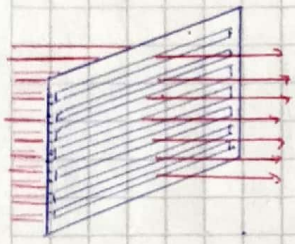


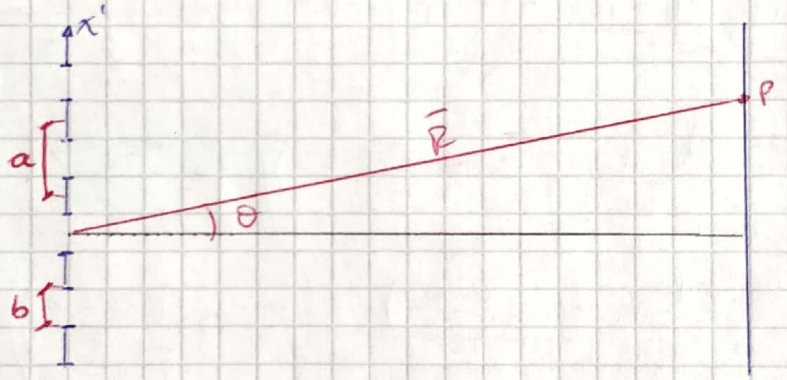
Como $a > b$,

$$\frac{\lambda}{b} > \frac{\lambda}{a}$$

(entran varios senos en cada sen)

N RENDIJAS





$$E_{TOT} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-ik\,\text{sen}\theta\, x'} dx' + \int_{a-b/2}^{a+b/2} e^{-ik\,\text{sen}\theta\, x'} dx' + \dots + \int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} e^{-ik\,\text{sen}\theta\, x'} dx' \right] =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \sum_{j=1}^{N} \int_{(j-1)a-b/2}^{(j-1)a+b/2} e^{-ik\,\text{sen}\theta\, x'} dx' = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{-ik\,\text{sen}\theta\, x'}}{-ik\,\text{sen}\theta} \Bigg|_{x'=a(j-1)-b/2}^{x'=a(j-1)+b/2}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \sum_{j=1}^{N} \frac{e^{-ik\,\text{sen}\theta\,(j-1)a}}{-ik\,\text{sen}\theta} \left[e^{-\frac{ikb\,\text{sen}\theta}{2}} - e^{\frac{ikb\,\text{sen}\theta}{2}} \right] \cdot \frac{b}{b}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} \cdot b \cdot e^{i(kR-\omega t)} \frac{\left[-2i\,\text{sen}\left(\frac{kb\,\text{sen}\theta}{2}\right) \right]}{-ikb\,\text{sen}\theta} \sum_{j=1}^{N} \left(e^{-ika\,\text{sen}\theta} \right)^{(j-1)}$$

SERIE GEOMÉTRICA

$$= \frac{\mathcal{E}_L b}{R} e^{i(kR-\omega t)}\, \text{senc}\left(\frac{kb\,\text{sen}\theta}{2}\right) \frac{e^{-ikaN\,\text{sen}\theta} - 1}{e^{-ika\,\text{sen}\theta} - 1}$$

NOTA

$$= \frac{\mathcal{E}_L \cdot b}{R} e^{i(kR-\omega t)} \operatorname{senc}\left(\frac{kb\,\mathrm{sen}\theta}{2}\right) \frac{e^{-\frac{ikaN\,\mathrm{sen}\theta}{2}}\left(e^{\frac{-ikaN\,\mathrm{sen}\theta}{2}} - e^{\frac{ikaN\,\mathrm{sen}\theta}{2}}\right)}{e^{-\frac{ika\,\mathrm{sen}\theta}{2}}\left(e^{\frac{-ika\,\mathrm{sen}\theta}{2}} - e^{\frac{ika\,\mathrm{sen}\theta}{2}}\right)}$$

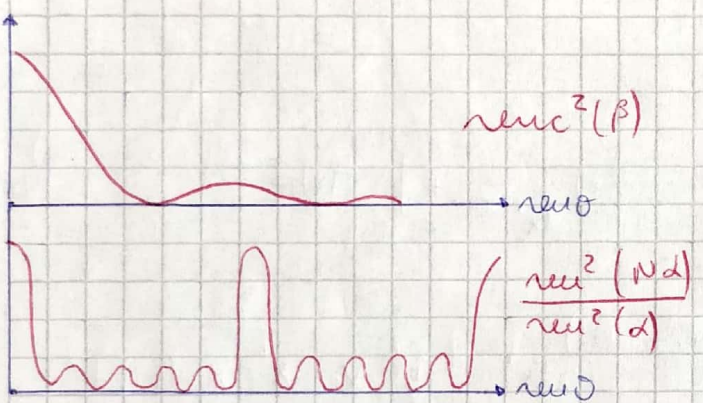
$$= \frac{\mathcal{E}_L \cdot b}{R} e^{i(kR-\omega t)} \operatorname{senc}\left(\frac{kb\,\mathrm{sen}\theta}{2}\right) e^{-\frac{ika(N-1)\,\mathrm{sen}\theta}{2}} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{kaN\,\mathrm{sen}\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{ka\,\mathrm{sen}\theta}{2}\right)}$$

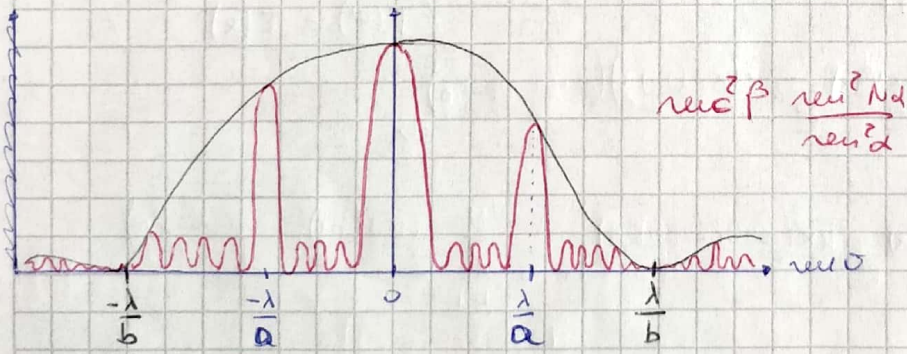
$\Rightarrow$ Si

- $\frac{kb\,\mathrm{sen}\theta}{2} = \beta$
- $\frac{ka\,\mathrm{sen}\theta}{2} = \alpha$
- $\frac{\mathcal{E}_L\, b}{R} = \sqrt{I_0}$

- $\left[E_{TOT} = \sqrt{I_0}\, e^{i(kR-\omega t)} \operatorname{senc}(\beta)\, e^{-i\alpha(N-1)} \frac{\mathrm{sen}(N\alpha)}{\mathrm{sen}(\alpha)}\right]$

$$\boxed{I = I_0 \operatorname{senc}^2(\beta) \frac{\mathrm{sen}^2(N\alpha)}{\mathrm{sen}^2(\alpha)}}$$



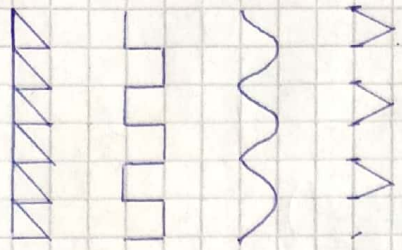


$$\boxed{\mathrm{sen}\,\theta_{máx} = \frac{m\lambda}{a}}$$ ECUACIÓN DE LA RED

A una pantalla de este tipo se le llama RED DE DIFRACCIÓN

NOTA

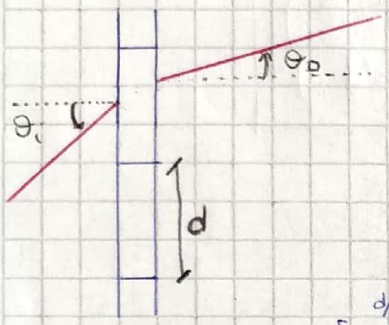
RED DE DIFRACCIÓN: Caso general



La red puede ser descripta como una función $T(x')$, tal que $T(x') = T(x' + b)$

$\Rightarrow$ Además, Defino $\boxed{T(x) = |T(x)| \cdot e^{i\varphi(x)}}$ → alteración de fase → por el elemento difractor
→ alteración de intensidad

Además, incido con una orientación distinta a la normal, y defino $b = d$.



$$E_{TOT} = \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \left[\int_{-d/2}^{d/2} T(x') e^{-ikx'(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} dx' + \dots + \int_{(N-1)d-\frac{d}{2}}^{(N-1)d+\frac{d}{2}} T(x') e^{-ikx'(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} dx' \right]$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \sum_{J=1}^{N} \int_{(J-1)d-\frac{d}{2}}^{(J-1)d+\frac{d}{2}} |T(x')| e^{i\varphi(x')} e^{-ikx'(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} dx'$$

C.V. $x' = x - (J-1)d$

$T(x') = T(x)$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \sum_{J=1}^{N} \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} |T(x)| e^{i\varphi(x)} e^{-ik(x-(J-1)d)(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} dx$$

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \int_{-d/2}^{d/2} |T(x)| e^{i\varphi(x)} e^{-ikx(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} dx \cdot \sum_{J=1}^{N} e^{ikd(J-1)(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)}$$

CÓMO DIFRACTA CADA ELEMENTO := F_D

SERIE GEOMÉTRICA

$$= \frac{E_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \cdot F_D \cdot e^{\frac{ikd(N-1)}{2}(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)} \cdot \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kNd}{2}(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{kd}{2}(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)\right)}$$

$\Rightarrow$ Si $\frac{E_L^2}{R^2} = I_0$

$\frac{kd}{2}(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D) = \beta$

$$\boxed{I = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(N\beta)}{\operatorname{sen}^2(\beta)} \cdot |F_D|^2}$$

DIFRACCIÓN DE UN PERÍODO

NOTA

OBSERVACIÓN:

Si extendo $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x' \notin \text{RED} \\ T(x') & \text{si } x' \in \text{RED} \end{cases}$

Puedo extender $F_D = \int_{-\infty}^{+\infty} |T(x)|\, e^{i\varphi(x)}\, e^{-ikx(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)}\, dx$

Si $\varphi(x) = ax + b$,

$F_D = \int_{-\infty}^{+\infty} |T(x)|\, e^{i\left[a - k(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)\right]x}\, e^{ib}\, dx$

$F_D = e^{ib}\, \mathcal{F}\left(|T(x)|\right)\left(a - k(\operatorname{sen}\theta_i - \operatorname{sen}\theta_D)\right)$ → (o algo así) → pero NO TRANSF.

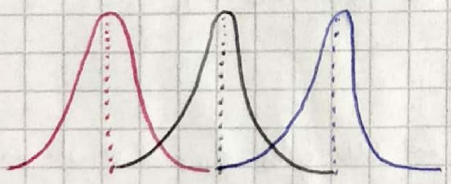
Por lo tanto, es posible conocer el patrón de difracción al conocer la función $T(x)$.

Suponga $\operatorname{sen}\theta_i = 0$

⇒ los picos del patrón vienen dados por $\operatorname{sen}\theta_{máx} = \frac{m\lambda}{d}$.

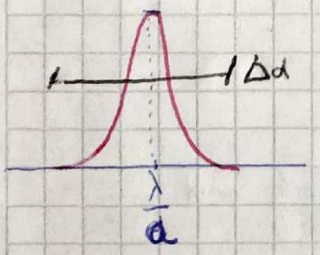
¿Qué relación de m y λ necesito para distinguir dos máximos de distintos colores?

CRITERIO DE RAYLEIGH



Dos líneas están resueltas si el máximo de un pico coincide con el mínimo del otro.

ANCHO DE UNA LÍNEA ESPECTRAL: distancia angular entre dos ceros (o dist. e/ picos)



$\alpha = \frac{ka}{2}\operatorname{sen}\theta$

$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{N} = \frac{ka}{2}\cos\theta\,\Delta\theta$

$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{N\alpha\cos\theta_{máx}}$$

NOTA

DISPERSIÓN ANGULAR: Distancia en θ entre dos pics de $\neq \lambda$

$$D = \frac{d\theta_{máx}}{d\lambda}$$

$$\text{red } \theta_{máx} = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \cos\theta_{máx} \cdot d\theta_{máx} = \frac{m}{d} d\lambda$$

$$\boxed{D = \frac{m}{d \cdot \cos\theta_{máx}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}}$$

PODER RESOLVENTE: mínima diferencia en λ que voy a poder distinguir para determinado $\Delta\theta$

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

↳ dif de λ que puedo apreciar cerca de λ

$\Delta\theta_{mín}$ que puedo resolver $= \frac{1}{2}\Delta\theta$ (Rayleigh)

$$\Rightarrow \Delta\theta_{mín} = \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{\lambda}{Na} \cdot \frac{1}{\cos\theta_{máx}}$$

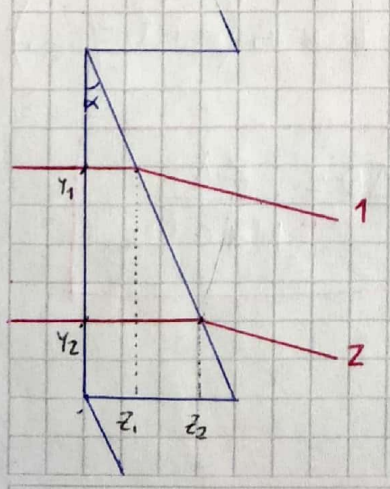
$$\Delta\theta_{mín} = \frac{\Delta\lambda_{mín} \cdot m}{a \cdot \cos\theta_{máx}}$$

$$\boxed{\Delta\lambda_{mín} = \frac{\lambda}{mN}}$$

$$\boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{mín}} = m \cdot N}$$

Sin embargo, en general la energía del patrón se concentra en el orden cero (donde no se aprecian las diferentes longitudes de onda). En consecuencia, no son aprovechables los órdenes mayores.

Las **REDES DE BLAZE** (brillo) permiten dirigir la energía hacia órdenes distintos al cero.



$$CO_1 = m z_1 + (z_2 - z_1)$$

$$CO_2 = m z_2$$

Como $tg\alpha$ pequeño, $tg\alpha = \frac{z_2 - z_1}{y_1 - y_2} \sim \alpha$

$$\Rightarrow CO_1 - CO_2 = m(z_1 - z_2)(m-1) \sim -(m-1)\alpha(y_1 - y_2)$$

NOTA

Si considero $y_2 = 0$, $\boxed{\varphi(y) = -(m-1)\,\alpha\, y\, k_0}$

Habíamos visto que $I = I_0 \dfrac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N k_0 d}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_0 d}{2}\operatorname{sen}\theta\right)} \cdot |F_D|^2$

$$F_D = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i\varphi(y)} e^{+i k_0 y \operatorname{sen}\theta}\, dy = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} e^{i k_0 y \left((1-m)\alpha + \operatorname{sen}\theta\right)}\, dy$$

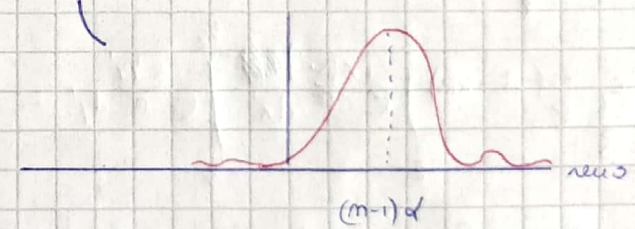
$$F_D = \frac{e^{i\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)} - e^{-i\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)}}{i k_0\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)} =$$

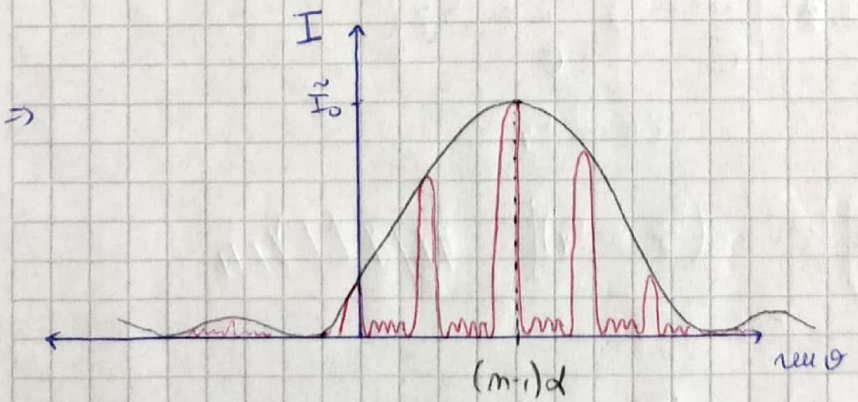
$$F_D = 2i \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)\right)}{i k_0\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)} \cdot \frac{d}{d} = d \cdot \operatorname{senc}\left(\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)\right)$$

$$\boxed{|F_D|^2 = d^2 \operatorname{senc}^2\left[\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)\right]}$$

$$\Rightarrow I = \tilde{I}_0 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{N k_0 d}{2}\operatorname{sen}\theta\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{k_0 d}{2}\operatorname{sen}\theta\right)} \cdot \operatorname{senc}^2\left[\frac{k_0 d}{2}\left((1-m)\alpha+\operatorname{sen}\theta\right)\right]$$

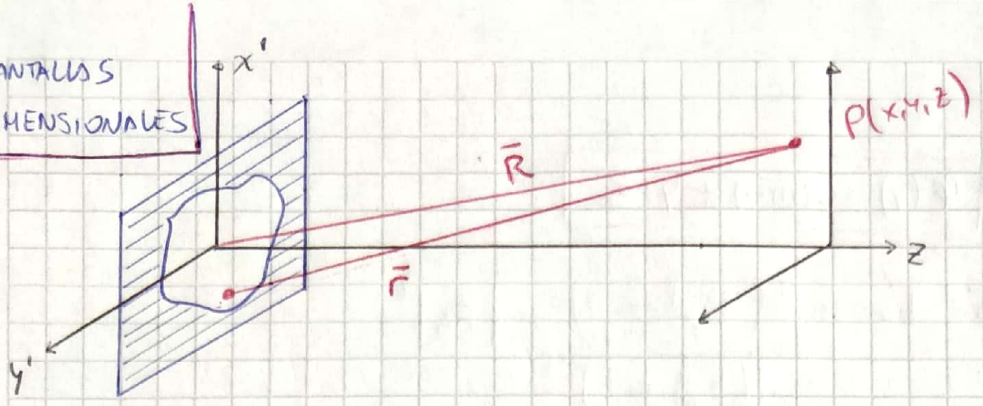






NOTA

PANTALLAS BIDIMENSIONALES

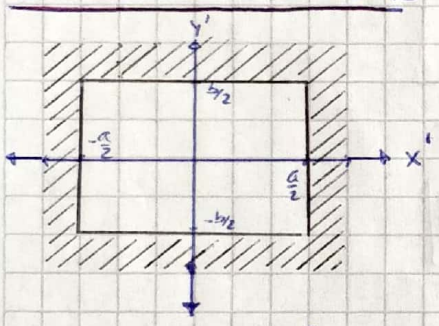


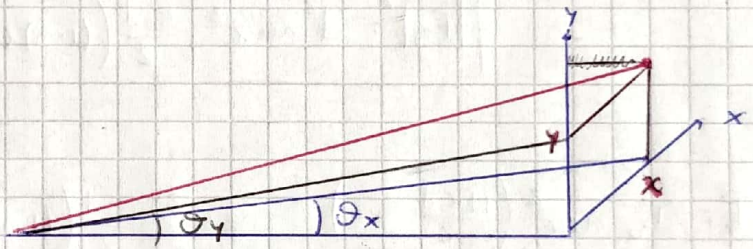
$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2 - 2(xx'+yy') + x'^2+y'^2}$$

$$r = R\sqrt{1 - \frac{2(xx'+yy')}{R^2} + \frac{x'^2+y'^2}{R^2}} \overset{\text{Taylor}}{\sim} R\left(1 - \frac{xx'+yy'}{R^2}\right)$$ Fraunhofer

$$\Rightarrow \bar{E} = \iint_{\text{ABERTURA}} \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR(1 - \frac{xx'+yy'}{R^2}))} dA = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \iint_{\text{ABERTURA}} e^{-ik\frac{(xx'+yy')}{R}} dx'\,dy'$$

ABERTURA RETANGULAR





$$\bar{E} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik\frac{(xx')}{R}} dx' \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik\frac{yy'}{R}} dy' = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx'\operatorname{sen}\vartheta_x} dx' \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iky'\operatorname{sen}\vartheta_y} dy'$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \underbrace{\left[e^{-ik\operatorname{sen}\vartheta_x \frac{a}{2}} - e^{+ik\operatorname{sen}\vartheta_x \frac{a}{2}}\right]}_{ik\operatorname{sen}\vartheta_x} \underbrace{\left[e^{-ik\operatorname{sen}\vartheta_y \frac{b}{2}} - e^{+ik\operatorname{sen}\vartheta_y \frac{b}{2}}\right]}_{ik\operatorname{sen}\vartheta_y}$$

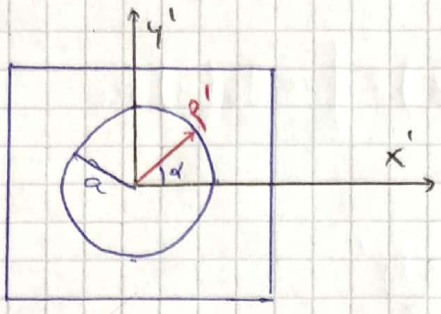
$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \underbrace{\left[-2i\operatorname{sen}\left(k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\vartheta_x\right)\right]}_{-ik\operatorname{sen}\vartheta_x} \underbrace{\left[-2i\operatorname{sen}\left(k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\vartheta_y\right)\right]}_{-ik\operatorname{sen}\vartheta_y} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(\omega t - kR)} \cdot 4ab$$

$$\frac{\mathcal{E}_L}{R} \cdot a \cdot b \cdot e^{-i(\omega t - kR)} \operatorname{sen}c\left(k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\vartheta_x\right) \operatorname{sen}c\left(k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\vartheta_y\right)$$

$$\Rightarrow \text{com} \begin{cases} k\frac{a}{2}\operatorname{sen}\vartheta_x = \alpha \\ k\frac{b}{2}\operatorname{sen}\vartheta_y = \beta \end{cases} \quad \boxed{I = I_0 \operatorname{sen}c^2(\alpha)\operatorname{sen}c^2(\beta)}$$

NOTA $I_0 = \frac{\mathcal{E}_L^2 a^2 b^2}{R^2}$

ABERTURA CIRCULAR



$x' = \rho' \cos\alpha$

$y' = \rho' \operatorname{sen}\alpha$

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \operatorname{sen}\varphi$

$$\vec{E} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \iint_{\text{ABERTURA}} e^{-ik\frac{(xx'+yy')}{R}} dx'dy'$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k}{R}\left(\rho\rho'(\cos\alpha\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi)\right)} d\alpha\ \rho'\,d\rho'$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{-i(\omega t - kR)} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{k\rho\rho'}{R}\cos(\alpha-\varphi)} d\alpha\ \rho'\,d\rho'$$

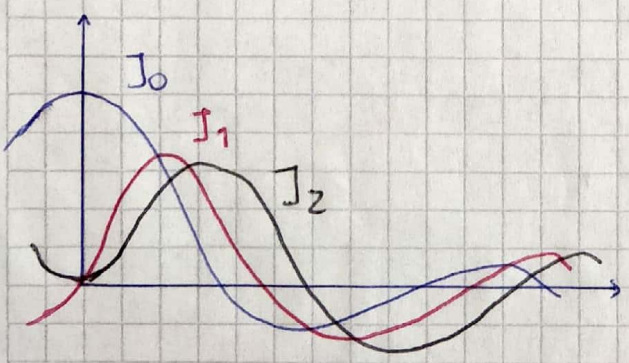
Por simetría de revolución, puedo suponer $\varphi = 0$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i(kR-\omega t)} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{i\frac{k\rho\rho'\cos\alpha}{R}} d\alpha\ \rho'd\rho' =$$

∿ FUNCIONES DE BESSEL

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\theta + u\cos\theta)} d\theta$$

y cumplen que $\frac{d}{du}\left[u^m \cdot J_m(u)\right] = u^m J_{m-1}(u)$



NOTA

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iu\cos\theta}\,d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{i\frac{k\rho\rho'\cos\alpha}{R}}\,d\alpha = 2\pi J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{R}\right)$$

$$\frac{d}{du}\left[u\,J_1(u)\right] = u\,J_0(u) \Rightarrow u\,J_1(u) = \int u\,J_0(u)\,du$$

$$\Rightarrow \int_0^a 2\pi J_0\left(\frac{k\rho\rho'}{R}\right)\rho'\,d\rho' \longrightarrow \text{C.V.:}\quad u = \frac{k\rho\rho'}{R},\quad du = \frac{k\rho\,d\rho'}{R}$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{k\rho a}{R}} J_0(u)\cdot\frac{uR}{k\rho}\cdot\frac{du\,R}{k\rho}$$

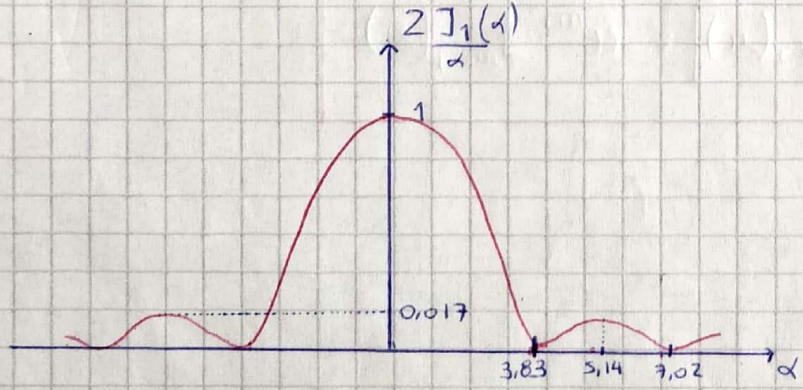
$$= 2\pi\left(\frac{R}{k\rho}\right)^2\int_0^{\frac{k\rho a}{R}} J_0(u)\cdot u\cdot du = 2\pi\left(\frac{R}{k\rho}\right)^2\left[u\cdot J_1(u)\right]_{u=0}^{u=\frac{k\rho a}{R}} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{R}{k\rho}\right)^2\left(J_1\left(\frac{k\rho a}{R}\right)\cdot\frac{k\rho a}{R}\right) = \frac{2\pi a R}{k\rho}J_1\left(\frac{k\rho a}{R}\right) = 2\pi a^2\,\frac{J_1\left(\frac{k\rho a}{R}\right)}{\frac{k\rho a}{R}}$$

$$\Rightarrow \overline{E} = \frac{\varepsilon_L}{R}e^{i(kR-\omega t)}\cdot 2\pi a^2\cdot\frac{J_1\left(\frac{k\rho a}{R}\right)}{\frac{k\rho a}{R}}$$

$$\Rightarrow I \cdot I_0 = \frac{\varepsilon_L^2\pi^2 a^4}{R^2} \qquad \cdot\ \alpha = \frac{k\rho a}{R} = k\,a\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$I = I_0\left[2\,\frac{J_1(\alpha)}{\alpha}\right]^2$$



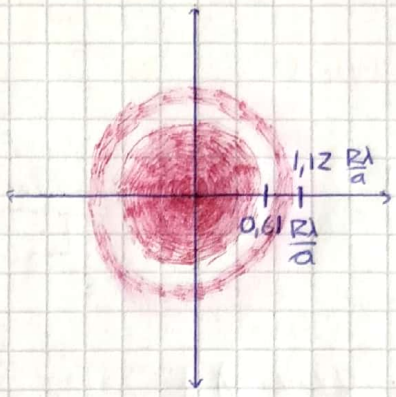
NOTA

El primer mínimo se da en $\alpha = \frac{kpa}{R} = \frac{2\pi pa}{\lambda R} = 3,83$

$\Rightarrow p = 0,61 \frac{R\lambda}{a}$

El segundo, en $\frac{2\pi pa}{\lambda R} = 7,02$

$p = 1,12 \frac{R\lambda}{a}$



Al disco central se le llama DISCO DE AIRY

La intensidad en el máximo central es unas 60 veces más intenso que el segundo. En él se concentra el 84% de toda la intensidad

FOCALIZACIÓN

CAMPO LEJANO: $|\bar{r} - \bar{r}'| \sim r - \frac{xx' + yy'}{r} + \frac{x'^2 + y'^2}{2r}$

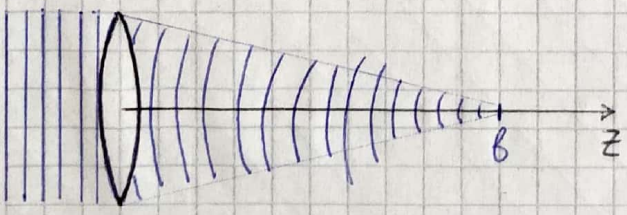
Para despreciar el último término, hacemos:

$k\left(\frac{x'^2 + y'^2}{2r}\right) \ll \pi$, con $x'^2 + y'^2 \equiv D^2$ (radio de la lente)

$\frac{2\pi D^2}{\lambda\, 2r} \ll \pi \Rightarrow$ $\boxed{D^2 \ll r\lambda}$ ZONA DE FRAUNHOFER

APROXIMACIÓN PARAXIAL

$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = |z| \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)^{1/2} \sim |z| + \frac{x^2 + y^2}{2|z|}$

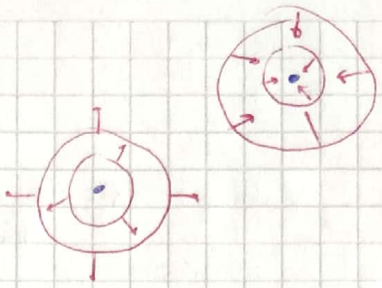


¿Cómo es la función de transmisión de la lente para que me haga converger el frente?

NOTA

$$E_c(\bar{r},t) = \frac{A}{r} e^{i(kr+\omega t)}$$ converge

$$E_D(\bar{r},t) = \frac{A}{r} e^{i(kr-\omega t)}$$ DIVERGE



$\Rightarrow E_c$ + APROX PARAXIAL

$$E_c(\bar{r},t) = \frac{A}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} e^{i(kz-\omega t)} \; e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2z_F}}$$

↳ $T(\bar{r})$ de la lente.

$\Rightarrow$ ~~$E(x,y,z) \; \frac{\mathcal{E}_L}{R} \; e^{i(kr-\omega t)} \; \Big\|_{LENTE}$~~

$$\bar{E}_{TOT} = \Big\|_{LENTE} \frac{\mathcal{E}_L}{r} e^{i(kr_1-\omega t)+L_{ENTE}} = \text{Fraunhofer} = \frac{\mathcal{E}_L}{r} \Big\|_{LENTE} e^{i\left[\left(r - \frac{xx'+yy'}{r} + \frac{x'^2+y'^2}{2r}\right)k - \omega t\right]} \cdot e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2b}}$$

$$= \text{PARAXIAL} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \Big\|_{LENTE} e^{ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z} - \frac{xx'+yy'}{r} + \frac{x'^2+y'^2}{2r} - \frac{x'^2+y'^2}{2b}\right) - \omega t} dx'dy'$$

$$= \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i\left(kz + \frac{k(x^2+y^2)}{2z} - \omega t\right)} \Big\|_{LENTE} e^{ik\left[\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) - \frac{xx'+yy'}{r}\right]} dx'dy'$$

Pero $\frac{x'^2+y'^2}{z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) = \frac{x'^2+y'^2}{2r}\left(1 - \frac{r}{b}\right) = \frac{x'^2+y'^2}{2r}\left(1 - \frac{|z| + \frac{x^2+y^2}{2z}}{b}\right) = \frac{x'^2+y'^2}{2r}\left(1 - \frac{z}{b} - \frac{x^2+y^2}{2zb}\right)$

$\Rightarrow$ En el foco

$$\bar{E}\Big|_{z=b} = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i\left[k\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right) - \omega t\right]} \Big\|_{LENTE} e^{ik\left[\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)\left(1 - \frac{z}{b} - \frac{x^2+y^2}{2zb}\right) - \frac{xx'+yy'}{r}\right]} dx'dy' \Big|_{z=b}$$

$$\bar{E}(z=b) = \frac{\mathcal{E}_L}{R} e^{i\left[k\left(b + \frac{x^2+y^2}{2b}\right) - \omega t\right]} \Big\|_{LENTE} e^{ik\left[\left(\frac{x'^2+y'^2}{2}\right)\right]}$$

NOTA

Pero $\frac{x'^2+y'^2}{z}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) = \frac{x'^2+y'^2}{zr}\left(1-\frac{r}{b}\right) = \frac{x'^2+y'^2}{zr}\left(1-\frac{|z|+\frac{x^2+y^2}{2z}}{b}\right) =$

$= \frac{x'^2+y'^2}{zr}\left(1-\frac{z}{b}-\frac{x^2+y^2}{2zb}\right)$

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2z}+\left(\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) = \frac{x^2+y^2}{2z}\left(1-\frac{x'^2+y'^2}{2rb}\right)+\frac{x'^2+y'^2}{zr}\left(1-\frac{z}{b}\right)$

$\Rightarrow$ En el foco, $z=b$

$\Rightarrow = \frac{x^2+y^2}{2b}\left(1-\frac{x'^2+y'^2}{2rb}\right)$ / pero $\frac{x'^2+y'^2}{2rb} < \frac{2\pi r}{\kappa}\cdot\frac{1}{2rb} = \frac{\pi}{\kappa b} = \frac{\pi\lambda}{2\pi b} = \frac{\lambda}{2b} \ll 1$

$\Rightarrow 1-\frac{x'^2+y'^2}{2rb} \sim 1$

$\Rightarrow$ En el foco, $\left[\frac{x^2+y^2}{2z}+\left(\frac{x'^2+y'^2}{z}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)\right]\Big|_{z=b} \sim \frac{x^2+y^2}{2b}$

$\Rightarrow \bar{E}\Big|_{z=b} = \frac{\mathcal{E}_L}{R}\, e^{i\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2b}\right)-\omega t\right]} \iint_{\text{LENTE}} e^{\frac{-i\kappa}{r_{z=b}}(xx'+yy')}\, dx'dy'$

- $\bar{E}\Big|_{z=b} = \frac{\mathcal{E}_L}{R}\, e^{i\left[k\left(z+\frac{x^2+y^2}{2b}\right)-\omega t\right]} \cdot 2\pi a^2 \cdot \frac{J_1\left(\frac{\kappa\rho a}{b}\right)}{\frac{\kappa\rho a}{b}}$

$\Rightarrow$ La intensidad viene dada por

$$I = I_0\left[2\frac{J_1\left(\frac{\kappa\rho a}{b}\right)}{\frac{\kappa\rho a}{b}}\right]^2, \quad \text{con } I_0 = \frac{\mathcal{E}_L^2\,\pi^2 a^4}{R^2}$$

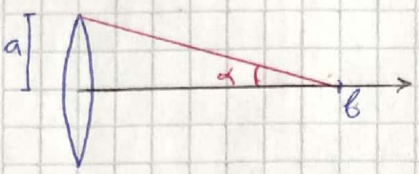
- $\Rightarrow$ En realidad, en el foco no hay un punto sino una mancha.

¿De qué radio?

NOTA

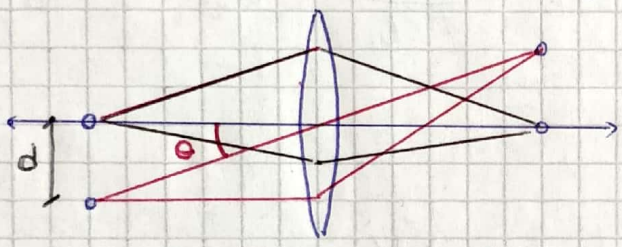
El mínimo viene dado por:

$$J_1\left(\frac{kpa}{b}\right)=0 \iff \frac{kpa}{b}=\frac{2\pi pa}{\lambda b}=3{,}83 \iff p=0{,}61\,\frac{\lambda b}{a}$$



$\Rightarrow p=0{,}61\,\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\Rightarrow$ la mancha focal disminuye a medida que aumenta α, el ángulo sustentado por la lente.

¿A qué distancia angular deben estar dos puntos para diferenciarlos?



Necesito $d > p = 0{,}61\,\frac{\lambda b}{a}$

y $d = \operatorname{tg}\theta \cdot b$

} Necesito $\operatorname{tg}\theta > \frac{0{,}61\,\lambda}{a}$