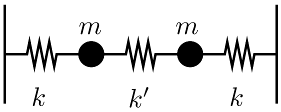
# Física 2

## Segundo cuatrimestre de 2019

## **Guía 2**: Sistemas con más grados de libertad

$\boxed{\textbf{1}}$ Considere el sistema de la figura. Las masas están apoyadas en una mesa sin rozamiento, sujetas a las paredes por resortes de constante elástica $k$ y unidas entre ellas por otro resorte de constante $k'$, todos de longitud natural $l_0$.

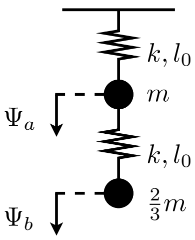



(a) Suponga que para los tres resortes vale la aproximación slinky ($l_0 \approx 0$). Considerando solamente desplazamientos verticales de las masa, obtenga las frecuencias y los modos normales transversales del sistema. Dibuje las configuraciones de cada modo.

(b) ¿Bajo qué condiciones espera observar batidos?

(c) Suponga ahora que las longitudes naturales de los resortes no son despreciables, pero inicialmente en equilibrio todos los resortes están estirados y consideremos solamente pequeños apartamientos verticales de las masas respecto de sus posiciones de equilibrio. ¿Cómo cambian los resultados encontrados en el ítem (a)?

$\boxed{\textbf{2}}$ Considere el sistema de la figura en ausencia de gravedad.

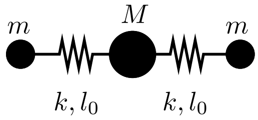



(a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa. Obtenga las frecuencias naturales de oscilación y los modos normales correspondientes del sistema. Dibuje la configuración de cada modo.

(b) Sabiendo que a $t = 0$ el sistema satisface $\Psi_a(0) = 1$ y $\Psi_b(0) = 0$ y que se encuentra en reposo, encuentre la posición de cada partícula a todo tiempo $t > 0$.

(c) Analice cómo se modifican los resultados por la presencia de la gravedad.

$\boxed{\textbf{3}}$ Considere el modelo simplificado de una molécula triatómica simétrica que se muestra en la figura. En el equilibrio dos átomos de masa $m$ están situados a ambos lados del átomo de masa $M = 2m$ y vinculados por resortes de constante $k$ y longitud natural $l_0$. En este problema sólo estaremos interesados en analizar los modos longitudinales de la molécula.




(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de cada masa.

(b) Halle las frecuencias naturales de oscilación y los correspondientes modos normales. Dibuje las configuraciones de cada modo.

(c) Escriba la forma más general posible de la posición de las masas en función del tiempo, indicando qué parámetros dependen de las condiciones iniciales.

(d) Determine condiciones iniciales para excitar sólo el modo más alto (mayor frecuencia).

(e) Si se aplica una fuerza armónica a una de las masas $m$, ¿qué modos puede excitar? ¿Cuántas resonancias espera encontrar y a qué frecuencias?

(f) Si se aplica una fuerza armónica a la masa $M$, ¿qué modos puede excitar? ¿Cuántas resonancias espera encontrar y a qué frecuencias? ¿En qué difiere esta situación de la del ítem anterior?

$\boxed{\textbf{4}}$ Considere ahora oscilaciones transversales del sistema del problema $\boxed{\textbf{3}}$, en la aproximación de pequeñas oscilaciones. En particular,

(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de las masas.

(b) Halle las frecuencias de los modos normales.

(c) Dibuje la configuración correspondiente a cada modo normal.

(d) Si el centro de masa se encuentra en reposo, escriba la forma más general de la posición de cada masa en función del tiempo.

(e) Dé condiciones iniciales para excitar sólo el segundo modo.

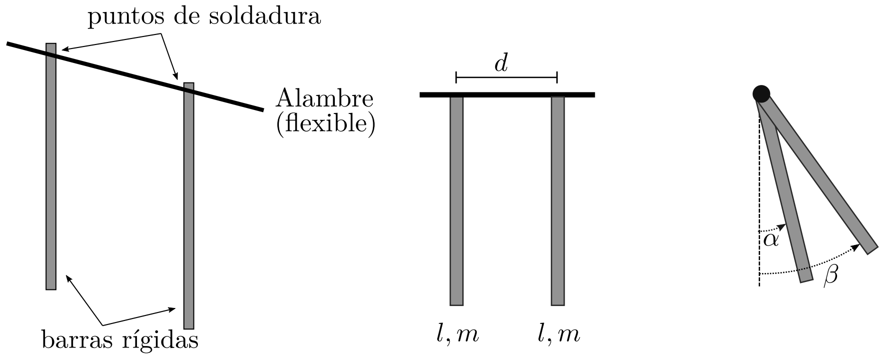
(f) Si se fuerza la masa del centro y se va variando la frecuencia, ¿cuántas resonancias espera encontrar? ¿qué modos se observan?

$\boxed{\textbf{5}}$ Considere dos osciladores, de frecuencias $\omega_1$ y $\omega_2$ que están acoplados mediante una constante de acoplamiento $\omega_{ac}$, de forma tal que las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\ddot{\psi}_1 = -\omega_1^2\psi_1 - \omega_{ac}^2(\psi_1 - \psi_2),$$
$$\ddot{\psi}_2 = -\omega_1^2\psi_2 - \omega_{ac}^2(\psi_2 - \psi_1).$$

Encuentre las frecuencias de los modos normales. Para los casos de acoplamiento débil ($\omega_{ac}^2 \ll \left|\omega_1^2 - \omega_2^2\right|$) y fuerte ($\omega_{ac}^2 \gg \left|\omega_1^2 - \omega_2^2\right|$), calcule cómo quedan las frecuencias naturales y las relaciones entre coordenadas de los respectivos modos. En particular, muestre que para el acoplamiento débil, los modos se parecen a los de los osciladores desacoplados.

$\boxed{\textbf{6}}$ Considere el sistema de la figura, compuesto por dos barras rígidas de longitud $l$ y masa $m$ que están soldadas perpendicularmente a un alambre flexible a una distancia $d$ entre sí. Consideraremos solamente desplazamientos pequeños de las barras en la dirección perpendicular a la del alambre.




(a) Encuentre los modos normales del sistema si los extremos del alambre están libres y este se encuentra apoyado sobre un soporte de forma tal de poder rotar libremente.

(b) Considere ahora que los extremos del alambre están fijos. Discuta cualitativamente a priori como espera que sean los modos normales, y cómo serán sus frecuencias comparadas con las del sistema con extremos libres.

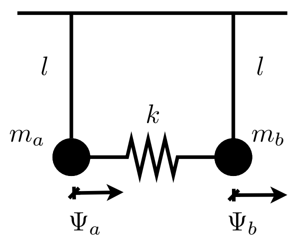
(c) Resuelva el problema con los extremos fijos analíticamente. Discuta cómo se comparan las frecuencias naturales del sistema con el caso libre.

(d) Vuelva a resolver el problema con extremos fijos pero ahora suponiendo que además hay pérdidas proporcionales a la velocidad de torsión.

(e) Si se fuerza uno de los péndulos de modo que oscile con una amplitud fija a una frecuencia fija, ¿cómo será el movimiento del otro péndulo?

(f) Para el caso en que los extremos del alambre están libres, se desea asimetrizar el sistema agregándole una pesa a una de las barras. ¿Cuán grande debe ser esa pesa para que el sistema se lo pueda considerar esencialmente desacoplado?

**7** Considere dos péndulos de igual longitud $l$ pero de masas diferentes $m_a$ y $m_b$, acoplados mediante un resorte de constante $k$ y longitud natural $l_0$, tal como se muestra en la figura.




(a) Escriba las ecuaciones de movimiento de cada masa en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

(b) Obtenga las frecuencias naturales del sistema y sus modos normales de oscilación. Dibuje las configuraciones de los modos normales e interprete el significado físico de estos modos normales.

(c) Inicialmente, a $t = 0$, la masa $b$ se desplaza en $\Psi_b(0) = 1$, mientras que la masa $a$ se deja fija en su posición de equilibrio ($\Psi_a(0) = 0$) y se sueltan ambas masa desde el reposo, de forma tal que las velocidades iniciales son cero. En tal caso, obtenga el desplazamiento de cada masa en función del tiempo.

(d) Analice la evolución temporal de las masas con las condiciones iniciales del inciso anterior en el régimen de acoplamiento débil. Grafique el desplazamiento de las masas en función del tiempo. ¿Qué tipo de movimiento observa?

(e) Calcule los valores medios, en un ciclo rápido, de la energía cinética de $a$ ($\langle T_a \rangle$) y de $b$ ($\langle T_b \rangle$). Grafique $\langle T_a \rangle$ y $\langle T_b \rangle$, y analice las diferencias en los gráficos al cambiar los valores de las masas (en particular mire los límites $m_a = m_b$, y $m_a$ muy diferente de $m_b$). Calcule el valor medio en un ciclo rápido de la energía de interacción entre las dos partículas.

**8** Dado el sistema de la figura, supuesto en el equilibrio en las condiciones del dibujo, calcule sus frecuencias y modos normales,

(a) cuando todos los resortes son slinkies.

(b) cuando tenemos pequeños apartamientos respecto del equilibrio y las longitudes naturales de los resortes son menores que las en equilibrio.