Queremos justificar el sentido de la definición que dimos en clase

$$e^{ix} \equiv \cos(x) + i\sin(x). \tag{1}$$

Como mencionamos en clase, la motivación está en mirar el desarrollo en serie de la función del miembro derecho. Sabemos que para $\sin(x)$ y $\cos(x)$ (las funciones reales comunes de siempre) tenemos los siguientes desarrollos en serie

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{2}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{3}$$

Recordemos que, por definición, la unidad imaginaria i satisface que

$$i^2 = -1. \tag{4}$$

Por lo tanto, podemos escribir

$$(-1)^n = (i^2)^n = i^{2n}. \tag{5}$$

Luego, podemos reescribir los desarrollos de sin y cos como

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}, \tag{6}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{7}$$

Por lo tanto,

$$i\sin(x) = i\sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} i(i)^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{8}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \cos(x) + i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} && (9) \\ &= \sum_{m \text{ par}} \frac{(ix)^m}{m!} + \sum_{m \text{ impar}} \frac{(ix)^m}{m!} && (10) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ix)^m}{m!}. && (11) \end{aligned}$$

Recordemos que el desarrollo en serie de la exponencial real conocida e^x es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Por lo tanto, uno define la extensión de la exponencial a los complejos simplemente utilizando la misma serie de potencias, pero ahora evaluando en un número complejo z

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Luego, con esta definición de función exponencial para variables complejas, por lo calculado antes, vale la igualdad

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$