Física 2

Segundo cuatrimestre de 2019

Guía 3: Ecuación de ondas: condiciones de borde e iniciales

1 Considere una cuerda de longitud L y densidad lineal de masa μ sometida a una tensión T_0.

(a) Proponga como solución de la ecuación de ondas para un modo normal la expresión $\Psi(x,t) = A\sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\theta)$ y obtenga la relación de dispersión del sistema.

(b) Tomando como origen del sistema de coordenadas $x = 0$ el extremo izquierdo de la cuerda, encuentre la forma particular que adopta la solución propuesta en los siguientes casos:

i) Ambos extremos fijos: $\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0$.

ii) Un extremo fijo ($\Psi(0,t) = 0$) y el otro libre ($\frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$). Discuta cómo lograría el extremo libre para la cuerda y cómo se relaciona con la condición de borde asociada sobre $\frac{\partial\Psi}{\partial x}$.

iii) Ambos extremos libres: $\frac{\partial\Psi}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial\Psi}{\partial x}(L,t) = 0$ ¿A qué corresponde el modo de frecuencia mínima? ¿Cuánto vale la frecuencia de oscilación de ese modo?

(c) Tome ahora un sistema de coordenadas con $x = 0$ en el centro de la cuerda. Halle la forma que adopta la solución general propuesta si ambos extremos están fijos: $\Psi(-L/2,t) = \Psi(L/2,t) = 0$.

2 Se tiene una cuerda de 20 cm de longitud y 5 g de masa con ambos extremos fijos, sometida a una tensión de 120 N. Calcule sus modos naturales de oscilación. ¿Son todos audibles para el oído humano?

3 Las cuatro cuerdas de un violín, considere que todas son de igual longitud, emiten en su modo fundamental las notas: sol$_2$ (198/s); re$_3$ (297/s); la$_3$ (440/s) y mi$_4$ (660/s). La primera cuerda es de aluminio ($\rho = 2.6$ g/cm^3 y diámetro $d_1 = 0.09$ cm); las dos siguientes son de otro material ($\rho = 1.2$ g/cm^3) y diámetros $d_2 = 0.12$ cm y $d_3 = 0.1$ cm, y la cuarta es de acero ($\rho = 7.5$ g/cm^3) y diámetro $d_4 = 0.1$ cm. Calcular las tensiones a las que deben estar sometidas con respecto a la primera.

4 Mostrar que si $\psi(x,t)$ es solución de la ecuación de onda clásica, las funciones $\phi_1(x,t)$, $\phi_2(x,t)$ y $\phi_3(x,t)$ definidas abajo también lo son.

$$\phi_1(x,t) = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad \phi_2(x,t) = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad \phi_3(x,t) = \int \mathrm{d}t\,\psi(x,t).$$

5 Una cuerda de longitud L fija en sus extremos es soltada a oscilar con igual amplitud en sus dos modos de menor frecuencia.

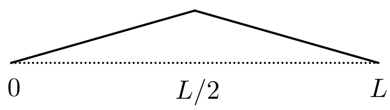
(a) Encuentre el apartamiento del equilibrio para cada punto de la cuerda en función del tiempo.

(b) ¿Con qué período se repite el movimiento?

(c) Grafíquelo para cuatro instantes equiespaciados dentro de un período.

6 Una cuerda de longitud L fija en un extremo y libre en el otro es lanzada a oscilar en sus modos 5 y 7 con igual amplitud, pero partiendo del reposo el modo 5 y de su máxima velocidad el modo 7. Repita los puntos del problema **5**.

7 Una cuerda de longitud L, densidad de masa lineal ρ y sometida a una tensión T_0, fija en sus extremos, se suelta en reposo desde el estado inicial indicado en la figura.



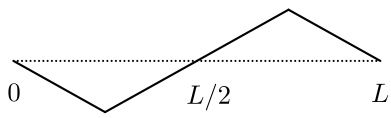
(a) Calcule el desplazamiento de la cuerda a todo tiempo.

(b) ¿Qué modos son excitados?

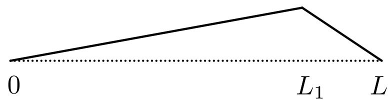
(c) ¿Cuál es el modo excitado de mayor amplitud?

(d) Grafique la cuerda a tiempos: $t = 0, \frac{\pi}{2\omega_{\text{fund}}}, \frac{\pi}{\omega_{\text{fund}}}, \frac{2\pi}{\omega_{\text{fund}}}$, donde ω_{fund} es la frecuencia fundamental.

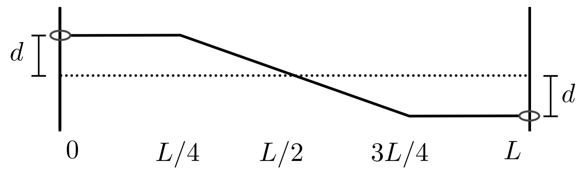
8 Repita el problema **7** pero para la condición inicial de la figura.



9 Considere una cuerda de longitud L y densidad de masa lineal ρ con sus extremos fijos. Inicialmente se aparta del equilibrio y se suelta la cuerda con la forma de la figura. ¿Para qué valor de L_1 se maximiza la excitación del segundo modo? ¿Qué cambia musicalmente al cambiar L_1?



10 Considere una cuerda de longitud L, densidad de masa lineal ρ y sometida a una tensión T_0, con sus extremos libres. A tiempo $t = 0$ se suelta del reposo con la forma de la figura.



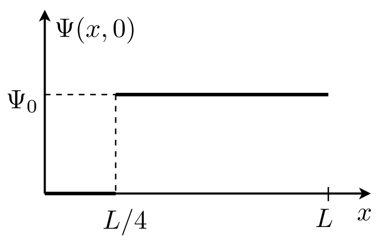
(a) Calcule el desplazamiento de la cuerda a todo tiempo.

(b) ¿Qué modos son excitados?

(c) ¿Cuál es el modo excitado de mayor amplitud?

(d) Grafique la cuerda a tiempos: $t = 0, \frac{\pi}{2\omega_{\text{fund}}}, \frac{\pi}{\omega_{\text{fund}}}, \frac{2\pi}{\omega_{\text{fund}}}$, donde ω_{fund} es la frecuencia fundamental.

11 Considere una cuerda de longitud L, de densidad de masa uniforme μ sometida a una tensión T_0, con un extremo fijo y el otro libre. Se le da a la cuerda la forma mostrada en la figura, y a $t = 0$ se la suelta.



(a) Halle $\Psi(x,t)$, indicando en particular qué modos se excitan.

(b) Grafique $\Psi(x,t)$ para $\omega_1 t = 0$, π, 2π, donde ω_1 es la frecuencia fundamental.

12 Se aplica una fuerza impulsiva sobre un 10% del largo de una cuerda fija en sus extremos. El impulso es suficientemente rápido como para asumir que la cuerda no se movió apreciablemente durante su aplicación.

(a) ¿Donde debe aplicarse el golpe para tener máxima amplitud en el quinto modo?

(b) ¿Y para tener máxima relación entre el quinto y el tercero?