

FÍSICA 2 (FÍSICA) - CÁTEDRA DIANA SKIGIN

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2021

REPASO: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Para cada uno de los siguientes números, halle sus partes real e imaginaria, y dibújelos en el plano complejo:

a) 0

b) 1

c)  $-1$

d)  $i$

e)  $-i$

f)  $i^2$

g)  $1+i$

h)  $0i$

i)  $1/2$

j)  $(1/2)i$

k)  $\pi$

l)  $\pi i$

m)  $-1-i$

n)  $a+bi$  (considere todas las combinaciones posibles de  $a$  y  $b$  positivos y negativos)

$\tilde{n}$ )  $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$  (considere todos los valores posibles de  $\theta$  en un intervalo de longitud  $2\pi$ )

o)  $(a^2+b^2)^{1/2}$

p)  $(a^2-b^2)^{1/2}$

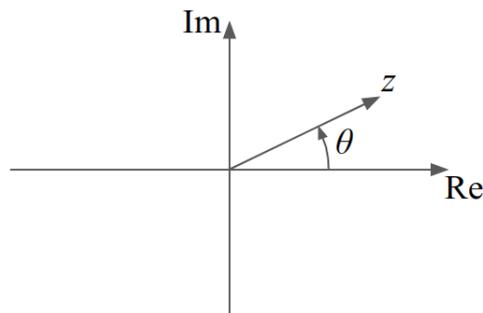
q)  $i(a^2+b^2)^{1/2}$

r)  $i(a^2-b^2)^{1/2}$

**Nota:**  $a$ ,  $b$  y  $\theta$  son números reales.

2. Para un número complejo  $z$ , se define su módulo  $|z|$  como la distancia euclídea que separa a  $z$  del origen del plano complejo. Escriba la expresión más general para el módulo de  $z$  en función de sus partes real e imaginaria, y luego aplíquela a cada caso del primer ejercicio.

3. Se define el argumento  $\arg(z)$  de un número complejo  $z$  como el ángulo  $\theta$  formado entre el eje real y la línea que va desde el origen a  $z$ , considerando positivo al sentido de giro que va desde el eje  $\Re^+$  hacia el eje  $\Im^+$ .



Halle el argumento para todos los números complejos del primer ejercicio.

4. Se define el conjugado de un número complejo  $z = a + bi$  como  $\bar{z} = a - bi$ .
- Verifique que el conjugado de un número real es ese mismo número real.
  - Verifique que el conjugado de un número imaginario puro es ese mismo número multiplicado por  $-1$ .
  - Verifique que el conjugado de un número complejo arbitrario corresponde a una reflexión (en el plano complejo) del número original respecto al eje real.
  - ¿Cuál es el conjugado de  $0$ ?
5. Obtenga el conjugado para todos los números del primer ejercicio, y determine sus partes real e imaginaria, su módulo y su argumento. Si es posible, use los resultados anteriores para ahorrar cuentas.
6. Verifique la siguiente identidad:

$$z\bar{z} = |z|^2$$

7. Halle las partes real e imaginaria de los siguientes números:

- $\frac{1+i}{1-i}$
- $\frac{1+i}{1+i}$
- $(1+i)(1-i)$
- $(1+i)^2$
- $(1+i)^3$
- $(1+i)^4$
- $\sqrt{(1+i)(1-i)}$
- $i^0$
- $i^n$  (con  $n$  entero positivo)
- $1/i^n$  (con  $n$  entero positivo)
- $1/(a+bi)$  (con  $a$  y  $b$  número reales, y  $|a+bi|$  distinto de  $0$ )
- $1/(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

**Ayuda:** Puede ser útil emplear la identidad del ejercicio anterior para trabajar con denominadores complejos.

8. ¿Cuáles de los siguientes datos me permiten determinar completamente a un número complejo cualquiera?
- Su parte real y su parte imaginaria
  - Su parte real y la parte imaginaria de su conjugado
  - Las partes real e imaginaria de su conjugado
  - Su módulo y su parte real
  - Su módulo y su parte imaginaria
  - Su módulo y su argumento
  - Su argumento y su parte real
  - Su argumento y su parte imaginaria

9. Compare el plano complejo con el plano  $\mathbb{R}^2$ . Analice similitudes y diferencias entre vectores de  $\mathbb{R}^2$  y números complejos. ¿Es posible pensar a un número complejo como un vector? ¿Qué forma de representar un número complejo se parece a la representación cartesiana de un vector? ¿Y a la representación polar?

10. Considere la fórmula de Euler:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

A partir de la misma, demuestre la identidad de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

11. Un número complejo  $z$  puede representarse en forma polar de la siguiente manera:

$$z = |z|e^{i \arg(z)}$$

Obtenga las partes real e imaginaria a partir de dicha representación.

12. Obtenga y grafique las partes real e imaginaria de las siguientes funciones del tiempo:

- a)  $\exp(i\omega t)$
- b)  $\exp(-i\omega t)$
- c)  $\exp(i(\omega t + \pi/2))$
- d)  $\exp(i(\omega t - \pi/2))$
- e)  $\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t)$
- f)  $i \exp(i\omega t)$
- g)  $-\exp(i\omega t)$
- h)  $1/2(\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t))$
- i)  $-1/2i(\exp(i\omega t) - \exp(-i\omega t))$

13. A partir de la fórmula de Euler, demuestre que:

- a)  $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$
- b)  $\sin(x) = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i)$
- c)  $\cosh(x) = \cos(ix)$  (con  $x$  real)
- d)  $\sinh(x) = -i \sin(ix)$  (con  $x$  real)

14. Verifique la identidad trigonométrica del coseno de la suma y resta de ángulos mediante la fórmula de Euler. Ayuda: obtenga la parte real de  $\exp(ix)\exp(\pm iy)$ . ¿Cómo puede obtener la identidad correspondiente al seno?

15. Use la fórmula de Euler para hallar la raíz cuadrada de  $i$  (escrita mediante sus partes real e imaginaria).