Un poco de álgebra lineal

Teoría

El cálculo de autovectores y autovalores es un punto clave de la materia, por esto es importante que entendamos qué estamos haciendo. Veamos primero qué son.

Los términos “autovalor” y “autovector” se aplican a ciertos valores escalares y ciertos vectores en relación con un endomorfismo[1] o una matriz cuadrada. Preguntarse por los autovectores de un endomorfismo es inquirir qué vectores peculiares no cambian su dirección al actuar sobre ellos el endomorfismo: esa rara cualidad hará de ellos una valiosa herramienta para simplificar el estudio de ese endomorfismo (o de la matriz correspondiente); representan de alguna manera una especie de “ejes naturales” o direcciones privilegiadas.

Es decir, cuando un endomorfismo $T : U \to U$ actúa sobre un vector $\vec{u} \epsilon U$, produce otro vector $\vec{v} = T\vec{u}$ que, en general, apuntará en una dirección diferente a la de $\vec{u}$; dicho en términos algebraicos: no será un múltiplo de $\vec{u}$. Cuando sea el caso en que $T\vec{u}$ resulte proporcional a $\vec{u}$, decimos que $\vec{u}$ es un *autovector* de T. De esa categoría queda excluido el vector nulo, para el cual siempre se tiene $T\vec{0} = \vec{0}$.

Vayamos a la definición formal.

Definición: Sea U un espacio vectorial, sea $T : U \to U$ un endomorfismo de U y sea $\vec{u} \epsilon U$ un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que $T\vec{u} = \lambda\vec{u}$, decimos que $\vec{u}$ es un *autovector* de T, y que λ es un *autovalor*. Se dice que el autovalor λ está asociado al autovector $\vec{u}$ (y viceversa).

En dimensión finita, los endomorfismos suelen estudiarse con ayuda de las matrices, por lo que definimos:

Definición: Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ y sea $\vec{u}$ un vector columna no nulo de R^n. Si existe un escalar λ tal que $A.\vec{u} = \lambda.\vec{u}$, decimos que $\vec{u}$ es un autovector de la matriz A, y que λ es un autovalor (asociado al autovector $\vec{u}$).

El paralelismo entre los conceptos relativos a endomorfismos y a matrices es total en espacios de dimensión finita, pues se tiene:

Proposición: Sea V un espacio vectorial, sea $T : V \to V$ un endomorfismo de V, sea B una base de V, sea A la matriz de T en la base B y sea $\vec{u}$ un vector cualquiera de V. Si $\vec{u}$ es un autovector de T (asociado a un autovalor λ), entonces $\vec{u}_B$ es un autovector

[1]Un endomorfismo es una aplicación lineal donde el espacio vectorial inicial y final coinciden $T : U \to U$.

de la matriz A (asociado al mismo autovalor), y viceversa.

Ahora bien, ¿cómo podemos encontrar los autovectores y los autovalores de una matriz cuadrada, A?. Para ello, tenemos que plantear la ecuación $A.\vec{u} = \lambda.\vec{u}$, que involucra dos incógnitas. Si conociésemos un autovector, sería simple hallar el autovalor asociado: bastaría realizar el producto $A.\vec{u}$ y compararlo con $\vec{u}$. Igualmente, si conociéramos un autovalor, no tendríamos dificultad en dar con sus autovectores correspondientes: todo lo que tendríamos que hacer es resolver el sistema de ecuaciones lineales $(A - \lambda I).\vec{u} = 0$ (la existencia de soluciones no triviales viene garantizada por ser λ un autovalor de A).
La cuestión es por dónde empezar. Enseguida se ve que lo más sencillo es buscar primero los autovalores y después los autovectores, ya que aquellos se pueden calcular sin necesidad de conocer estos. La clave es la siguiente:

Proposición: Una condición necesaria y suficiente para que λ sea autovalor de A es que el determinante $det(A - \lambda I)$ sea 0.

Demostración: λ es autovalor de $A \iff \exists\ \vec{u} \neq 0 / A\vec{u} = \lambda\vec{u} \iff \exists\ \vec{u} \neq 0 / (A - \lambda I)\vec{u} = 0 \iff$ el sistema $(A - \lambda I).\vec{u} = 0$ tiene soluciones no triviales $\iff$ la matriz $(A - \lambda I)$ es singular (no invertible), lo que equivale a que su determinante sea nulo.

Veamos un **ejemplo**: sea la siguiente matriz, calcular autovalores y autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con lo que vimos, para hallar los autovectores pedimos que $det(A - \lambda I) = 0$, entonces:

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

El determinante es:

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda)^2 - 12(-1 - \lambda) - 12 + (-1 - \lambda) = 0$$

Distribuyendo se llega a:

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2 + \lambda - 12) = 0$$

Vemos que $\lambda_1 = 0$ es una solución. Las otras dos soluciones vendrán del término cuadrático, se obtiene que: $\lambda_2 = -4$ y $\lambda_3 = 3$.

Veamos alguno de los autovectores asociados: λ_2 = -4

$$\begin{pmatrix} 1+4 & 2 & 1 \\ 6 & -1+4 & 0 \\ -1 & -2 & -1+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

De esta manera, se llega al siguiente sistema de ecuaciones que deben cumplir las componentes del autovector:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se obtiene que:

$$x_2 = -2x_1$$

Reemplazando en la tercera ecuación se obtiene que:

$$-x_1 - 2(-2x_1) + 3x_3 = 0$$

$$3x_1 + 3x_3 = 0$$

Por lo que $x_3 = -x_1$. Veamos que información aporta la primera ecuación:

$$5x_1 + 2(-2x_1) - x_1 = 0$$

, y vemos que obtenemos 0=0. Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

Por lo que podemos elegir:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De forma análoga obtenemos los otros dos autovectores.

Con esto visto, dejo algunos ejercicios.

Ejercicios

1. Hallar los autovalores y autovectores de cada una de las siguientes matrices:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Calcular los valores de los parámetros a y b para que el vector (-1, 1) sea un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ en la matriz A. ¿Cuál es el otro autovalor?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

3. Determinar los valores de los parámetros a, b y c para que el vector (0, 0, 1) sea un autovector asociado al autovalor $\lambda = 4$ en la matriz A. ¿Cuáles son los otros autovectores asociados a dicha matriz?

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & b \\ b & c & 4 \end{pmatrix}$$

4. Dada la matriz B, calcular:
   a) Sus autovalores y autovectores asociados.
   b) Aplicando propiedades, obtener los autovalores y autovectores de las matrices $2B$, B^T y B^{-1}.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$