Física 2 (Física)

Primer Cuatrimestre 2023

Guía 1: Oscilador Armónico Simple

1. Escriba y resuelva las ecuaciones de movimiento asociadas con los siguientes sistemas:

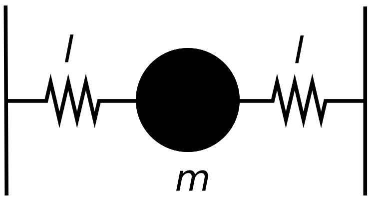
   a) Péndulo de longitud l en presencia de un campo gravitatorio con aceleración g. Discuta todas las aproximaciones que realiza.

   b) Oscilaciones longitudinales de una masa m sujeta a dos paredes mediante dos resortes iguales de constante k, para los dos casos:

      1) longitud natural del resorte l_0 (con $l_0 < l$).

      2) *slinky* (es decir, $l_0 = 0$).

   c) Oscilaciones transversales del sistema del punto anterior, discutiendo las diferencias entre los casos i) y ii), y analizando cuidadosamente las aproximaciones que realiza. En el caso i) analice la diferencia entre considerar que los resortes están tensionados en la posición de equilibrio ($l_0 < l$) o que están relajados en dicha posición ($l_0 = l$).



2. Considere el movimiento de una masa m sujeta a un resorte de constante elástica $k = m\omega_0^2$ y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ. Demuestre que el resultado para el oscilador "sobreamortiguado" dado por:

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cosh(|\omega|\,t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\sinh(|\omega|\,t)}{|\omega|}\right\}$$

se deduce de las siguientes:

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0)\cos(\omega t) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\}$$

$$\omega = \pm i\,|\omega|\,,\ |\omega| = \sqrt{\frac{1}{4}\Gamma^2 - \omega_0^2}$$

Sugerencia: verifique primero las identidades $\cos(ix) = \cosh(x)$ y $\sin(ix) = i\sinh(x)$; luego úselas.

3. Comenzando con la ecuación general dada en el problema anterior para oscilaciones libres subamortiguadas, muestre que para amortiguamiento crítico la solucion es:

$$x(t) = e^{-\Gamma t/2}\left\{x(0) + \left[\dot{x}(0) + \frac{1}{2}\Gamma x(0)\right]t\right\}$$

Muestre que también se obtiene este resultado comenzando con la ecuación para oscilaciones sobreamortiguadas.

4. Verifique que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación del oscilador armónico libre, cualquier combinación lineal $\phi = \mathrm{A}\phi_1 + \mathrm{B}\phi_2$ también es solución. Muestre que esto también vale si la fuerza disipativa es proporcional a la velocidad. ¿Vale si es un rozamiento constante?

5. *a*) Escriba la ecuación de movimiento para una masa m sujeta a un resorte de constante elástica k y constante de amortiguamiento por unidad de masa Γ, sobre la que se aplica una fuerza dependiente del tiempo $F(t)$.

b) Proponga la siguiente solución homogénea: $x_{\mathrm{h}}(t) = Ce^{-t/2\tau}\cos(\omega_1 t + \theta)$ y halle los valores de τ y de ω_1. ¿De qué depende el valor de C y de θ? ¿Es lícito plantear las condiciones iniciales sobre la solución homogénea?

c) Considere que $F(t)$ tiene la forma $F(t) = F_0\cos(\omega t)$ y proponga la siguiente solución particular: $x_{\mathrm{P}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Obtenga A y B. Grafique cualitativamente A y B en función de ω. Discuta si se pierde generalidad al suponer que la fuerza externa tiene esa forma.

d) Grafique cualitativamente la posición de la masa en función del tiempo.

e) Calcule la potencia media que se consume en el estado estacionario y la potencia media de pérdida por fricción. Verifique la igualdad de ambas potencias.

f) Verifique que si $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa es $F_1(t)$ y $x_2(t)$ lo es cuando la fuerza externa es $F_2(t)$, entonces $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ será solución de la ecuación diferencial cuando la fuerza externa sea $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$, si y sólo si las condiciones iniciales son la suma de las condiciones iniciales de los dos casos.

g) Proponga ahora como solución particular la solución compleja $x_{\mathrm{p}}(t) = Ae^{-i\omega t}$ y demuestre que $\mathfrak{Re}(A) = A_{\text{elástico}}$ y que $\mathfrak{Im}(A) = A_{\text{absorbente}}$. ¿Por qué es así?