Guia 3, Problema 4:

Se suelta una cuerda fija en sus extremos desde el estado inicial en reposo indicado en la figura.

```
a) Calcule la evolución en el tiempo.
b) ¿Cuál es el modo excitado de mayor amplitud?
c) ¿Qué modos no son excitados?
```

image

La solución de la ecuación de onda para una cuerda con extremos fijos partiendo del reposo es
$\psi(x,t) = \sum_m B_m \sin(\pi \frac{m}{L} x) \cos(\omega_m t + \phi_m)$

Para obtener los B_m debemos "proyectar" el estado inicial $f(x)$ en la corresponiente base de Fourier $\sin(m \frac{\pi}{L} x) \forall m$

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{-\frac{\lambda_1}{2}}^{\frac{\lambda_1}{2}} f(x) \sin(m \frac{\pi}{L} x), \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(m \frac{\pi}{L} x), \mathrm{d}x$$

In [1]:
```python
# gráficas incluidas en el notebook
%pylab inline
# carga biblioteca cálculo simbólico
from sympy import *
# genera expresiones matemáticas "líndas"
init_printing(use_unicode=True)
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

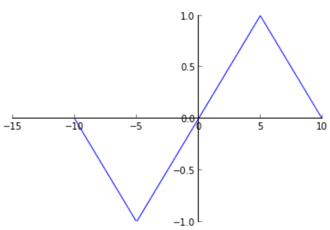
In [2]:
```python
# declara símbolos a usar como tales
x, m, L, a, H= symbols('x m L a H')
# x va de 0 a L
# m es un número natural
# H es la máxima amplitud del estado inicial
a= H/(L/2)
```

A lo largo de toda la longitud de onda del modo fundamental $\lambda_1 = 2L$ ($k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$) debe desarrolarse una descripción períodica de del estado inicial $f(x)$. Una elección posible es extenderla entre $(-L, L)$ como una función partida en tres partes.

$$f_1 = -a(x+L) \qquad (-L < x < -\frac{L}{2})$$
$$f_2 = ax \qquad (-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2})$$
$$f_3 = -a(x-L) \qquad (\frac{L}{2} < x < L)$$

In [3]:
```python
f1= -a* (x+ L)
f2= a*x
f3= -a* (x- L)
```

In [4]:
```python
# La versión períodica de la condición puede graficarse eligiendo valores arbitrarios para H y L (H=5, L=10).
f1s= f1.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, -10, -5)
f2s= f2.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, -5, 5)
f3s= f3.subs([(H, 1), (L, 10)] ), (x, 5, 10)
plot(f1s, f2s, f3s )
```



Out[4]: `<sympy.plotting.plot.Plot at 0x3433510>`

Queda entonces para obtener B_m resolver tres integrales.

$$B_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{-\frac{L}{2}} f_1(x) \sin(m \frac{\pi}{L} x), \mathrm{d}x + \frac{1}{L} \int_{-\frac{-L}{2}}^{\frac{-L}{2}} f_2(x) \sin(m \frac{\pi}{L} x), \mathrm{d}x + \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2}}^{L} f_3(x) \sin(m \frac{\pi}{L} x), \mathrm{d}x$$

In [5]:
```python
# El primer término
aux= sin(m* pi* x/ L) # los elementos de la base
e1= integrate(f1* aux,(x, -L, -L/2))
simplify(e1)
```

Out[5]:
$$\begin{cases} 0 & \text{for}\, m = 0 \\ \frac{HL}{\pi m} \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [6]:
```python
# El segundo
e2= integrate(f2* aux,(x, -L/2, L/2))
simplify(e2)
```

Out[6]:
$$\begin{cases} 0 & \text{for}\, m = 0 \\ \frac{2HL}{\pi m} \left(-\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [7]:
```
#El tercero
e3= integrate(f3* aux,(x, L/2, L))
simplify(e3)
```

Out[7]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for}\, m = 0 \\ \frac{HL}{\pi m}\left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m}\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{2}{\pi m}\sin\left(\pi m\right)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [8]:
```
# Los Bm son entonces
Bm= simplify((1/L)* (e1+ e2+ e3))
Bm
```

Out[8]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for}\, m = 0 \\ \frac{4H}{\pi^2 m^2}\left(2\sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \sin\left(\pi m\right)\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esto equivale a $\frac{8H}{\pi^2 m^2}$ para los m impares, siendo 0 para pares. Queda así respondido el punto c) del problema: Con la condición inicial dada no se exitan los modos pares.

La evolución temporal (punto a) del problema), si parte del reposo, es

$$\psi(x,t) = \sum_m \frac{8H}{\pi^2 m^2}\sin(\pi \frac{m}{L} x)\cos(\omega_m t)$$

Respecto al punto b) del problema, es evidente de la expresión para B_m ver que el modo de mayor amplitud es el de $m = 1$

In [9]:
```
# Asignando una H=1 para la amplitud de la condición inicial el primer modo (m=1) es
# Bm.evalf(subs={m: 1, H: 1})
Bm.subs([(m, 1)] )
```

Out[9]:

$$\frac{8H}{\pi^2}$$

In [10]:
```
# Y el coeficiente Bm para el siguiente modo excitable (m=3) es el siguiente. Su módulo es casi de un orden de magnitud menor al del modo fundamental.
# Bm.evalf(subs={m: 3, H:1})
Bm.subs([(m, 3)] )
```

Out[10]:

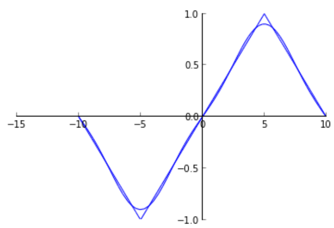
$$-\frac{8H}{9\pi^2}$$

In [11]:
```
# La serie de Fourier describiendo la condición inicial con solo los primeros dos modos no nulos (m=1) y (m=3)
psi= Bm* aux
psis= psi.subs([(H, 1), (L, 10), (m, 1)] )
psis2= psi.subs([(H, 1), (L, 10), (m, 3)] )
psis+ psis2
```

Out[11]:

$$\frac{8}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) - \frac{8}{9\pi^2}\sin\left(\frac{3\pi}{10}x\right)$$

In [12]:
```
# Se aprecia que con solo estos dos primeros modos normales la serie se aproxima bastante a la condición inicial.
plot((psis+ psis2, (x, -10, 10) ), f1s, f2s, f3s)
# plot((psis+ psis2, (x, -10, 10) ), line_color="r")
```



Out[12]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x3bc4a10>

In [ ]: