
Fourier para cuerda con extremos fijos

Victor Bettachini

September 11, 2014

Guía 3, Problema 4:

Se suelta una cuerda fija en sus extremos desde el estado inicial en reposo indicado en la figura.

- Calcule la evolución en el tiempo.
- ¿Cuál es el modo excitado de mayor amplitud?
- ¿Qué modos no son excitados?

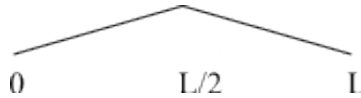


Figure 1: image

La solución de la ecuación de onda para una cuerda con extremos fijos partiendo del reposo es

$$\psi(x, t) = \sum_m B_m \sin\left(\pi \frac{m}{L} x\right) \cos(\omega_m t + \phi_m)$$

Para obtener los B_m debemos “proyectar” el estado inicial $f(x)$ en la correspondiente base de Fourier $\sin(m\frac{\pi}{L}x) \forall m$

$$B_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{-\frac{\lambda_1}{2}}^{\frac{\lambda_1}{2}} f(x) \sin\left(m \frac{\pi}{L} x\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(m \frac{\pi}{L} x\right) dx \quad (1)$$

```
In [1]: # gráficas incluidas en el notebook
%pylab inline
# carga biblioteca cálculo simbólico
from sympy import *
# genera expresiones matemáticas "lindas"
init_printing(use_unicode=True)
```

Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib

```
In [2]: # declara símbolos a usar como tales
x, m, L, a, H = symbols('x m L a H')
# x va de 0 a L
# m es un número natural
# H es la máxima amplitud del estado inicial
a = H/(L/2)
```

Extiende el estado inicial $f(x)$ a lo largo de la longitud de onda del modo fundamental $\lambda_1 = 2L$ ($k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_1}$), e.g. en $(-L, L)$.

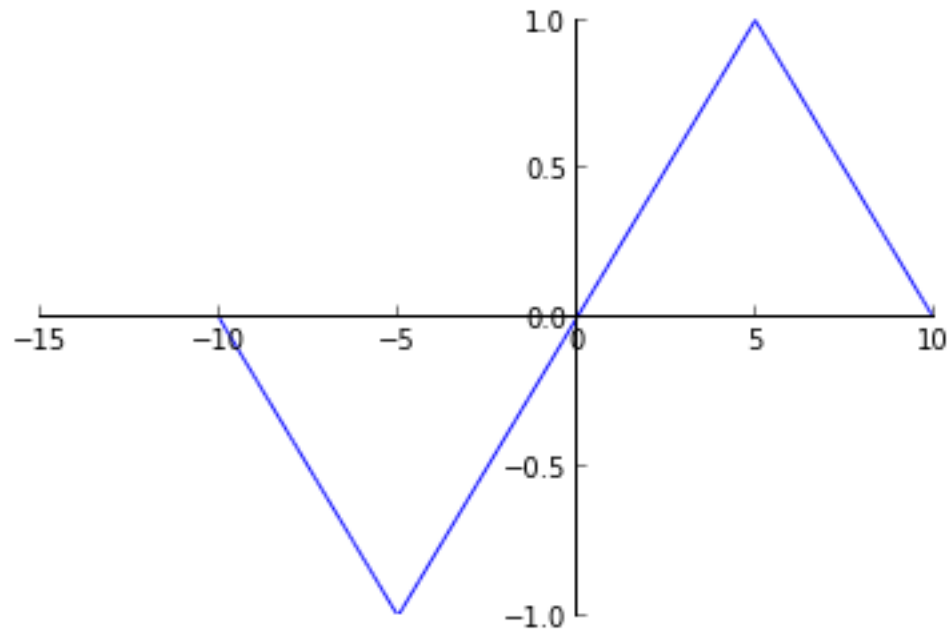
$$f_1 = -a(x + L) \quad \left(-L < x < -\frac{L}{2}\right)$$

$$f_2 = ax \quad \left(-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}\right)$$

$$f_3 = -a(x - L) \quad \left(\frac{L}{2} < x < L\right)$$

```
In [3]: f1= -a* (x+ L)
f2= a*x
f3= -a* (x- L)

# Grafico la condición inicial con los valores H=1 L=10
f1s= f1.subs([(H, 1), (L, 10)]), (x, -10, -5)
f2s= f2.subs([(H, 1), (L, 10)]), (x, -5, 5)
f3s= f3.subs([(H, 1), (L, 10)]), (x, 5, 10)
plot(f1s, f2s, f3s)
```



Out [3]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x3d5b8d0>

$$B_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{-\frac{L}{2}} f_1(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx + \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f_2(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx + \frac{1}{L} \int_{\frac{L}{2}}^L f_3(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx \quad (2)$$

```
In [4]: # El primer término
aux= sin(m* pi* x/ L) # los elementos de la base
e1= integrate(f1* aux, (x, -L, -L/2))
simplify(e1)
```

Out [4]:
$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{HL}{\pi m} \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

In [5]:

```
# El segundo
e2= integrate(f2* aux, (x, -L/2, L/2))
simplify(e2)
```

Out [5]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{2HL}{\pi m} \left(-\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
In [6]: #El tercero
e3= integrate(f3* aux, (x, L/2, L))
simplify(e3)
```

Out [6]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{HL}{\pi m} \left(\cos\left(\frac{\pi m}{2}\right) + \frac{2}{\pi m} \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \frac{2}{\pi m} \sin(\pi m) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
In [7]: # Los Bm son entonces
Bm= simplify((1/L)* (e1+ e2+ e3))
Bm
```

Out [7]:

$$\begin{cases} 0 & \text{for } m = 0 \\ \frac{4H}{\pi^2 m^2} \left(2 \sin\left(\frac{\pi m}{2}\right) - \sin(\pi m) \right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Esto equivale a $\frac{8H}{\pi^2 m^2}$ para los m impares, siendo 0 para pares. Queda así respondido el punto c) del problema: Con la condición inicial dada no se excitan los modos pares.

La evolución temporal (punto a) del problema), si parte del reposo, es

$$\psi(x, t) = \sum_m \frac{8H}{\pi^2 m^2} \sin\left(\pi \frac{m}{L} x\right) \cos(\omega_m t) \quad (3)$$

(4)

Respecto al punto b) del problema, es evidente de la expresión para B_m que el modo de mayor amplitud es el del fundamental ($m = 1$).

```
In [8]: Bm.subs([ (m, 1) ] )
```

Out [8]:

$$\frac{8H}{\pi^2}$$

El módulo del coeficiente B_m para el siguiente modo excitable ($m = 3$) es el siguiente es casi de un orden de magnitud menor al del modo fundamental.

```
In [9]: Bm.subs([ (m, 3) ] )
```

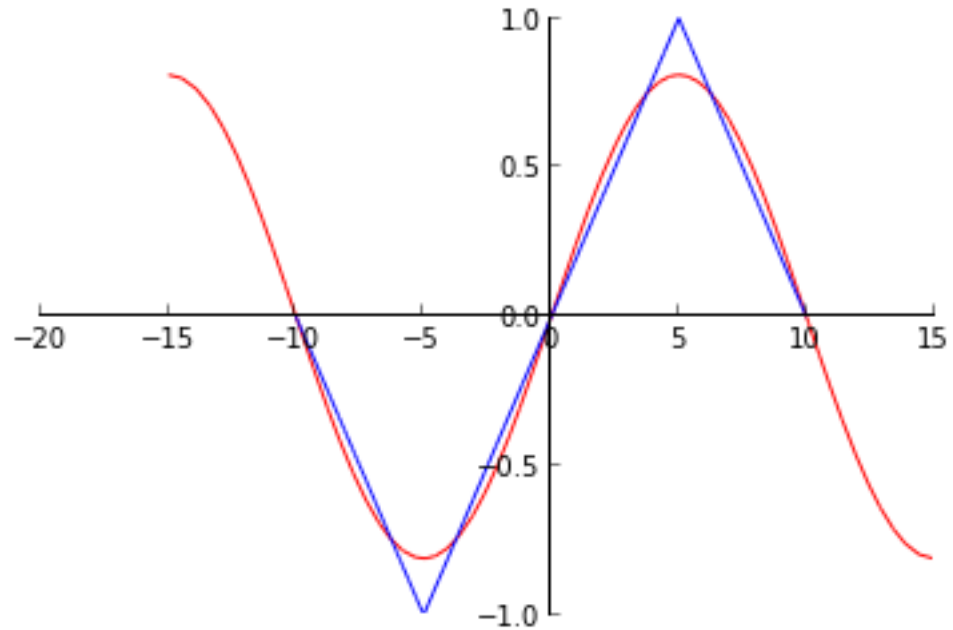
Out [9]:

$$-\frac{8H}{9\pi^2}$$

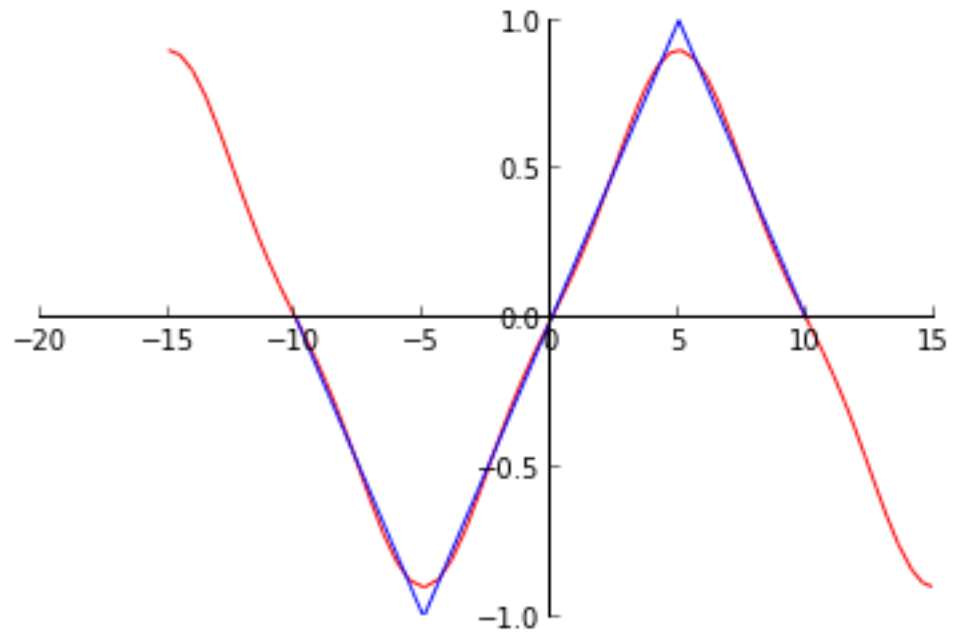
Grafico a continuación la suma de los primeros tres términos no nulos de la serie para evidenciar que se aproxima tal suma a la condición inicial.

```
In [18]: def graficaSerie(terminos):  
         qbas= (Bm*aux).subs([(H, 1), (L, 10)]) # asigno valores a A, L en terminos  
         qout=0  
         for k in range(0,terminos): # sumo terminos impares de la serie  
             qout+= qbas.subs([(m,k*2+1)])  
         p= plot((qout, (x, -15, 15) ), f1s, f2s, f3s, show=False)  
         p[0].line_color= 'red' # la suma de la serie en rojo  
         p.show()
```

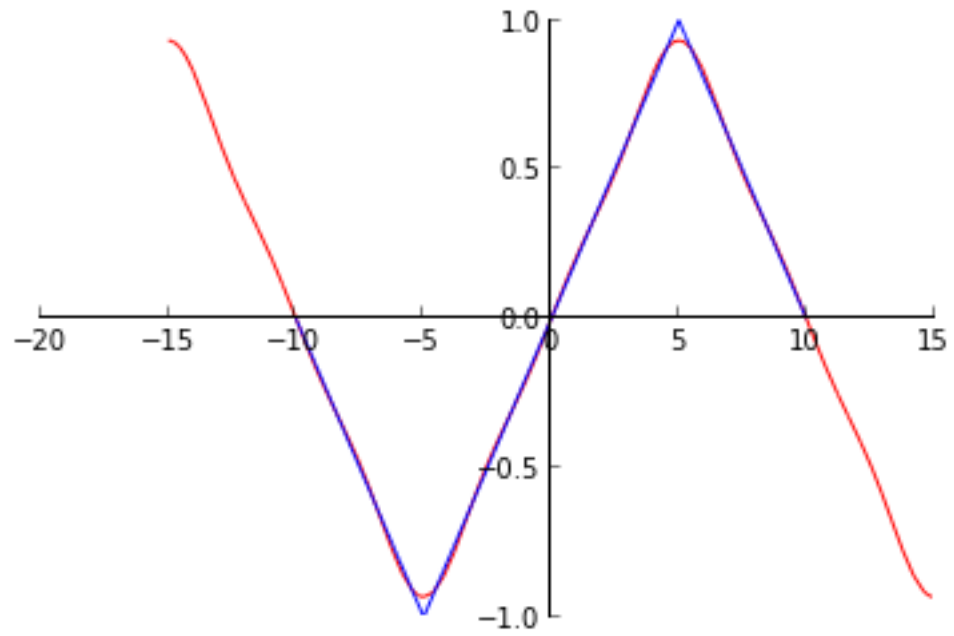
```
In [19]: graficaSerie(1)
```



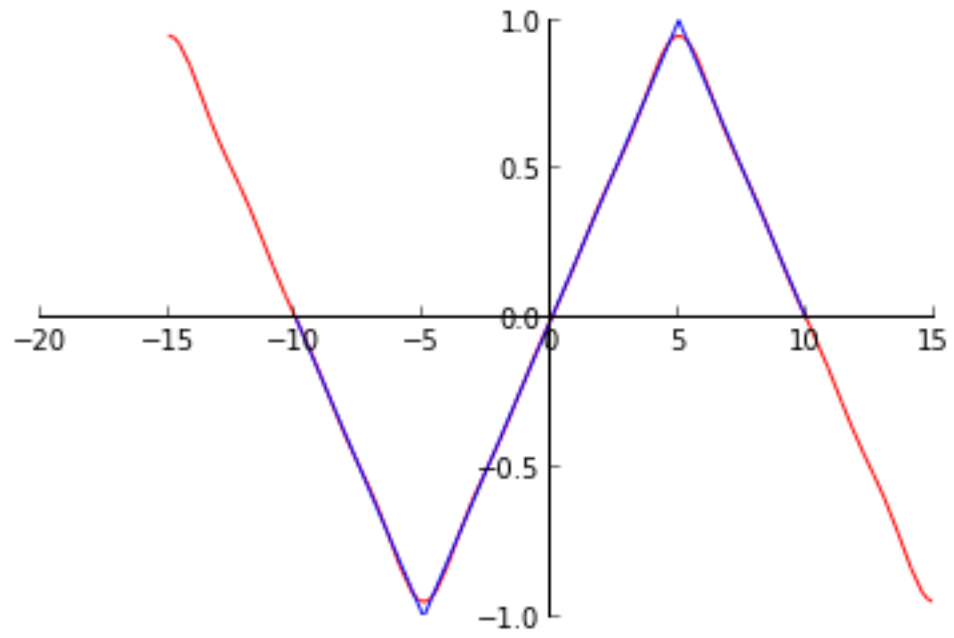
```
In [20]: graficaSerie(2)
```



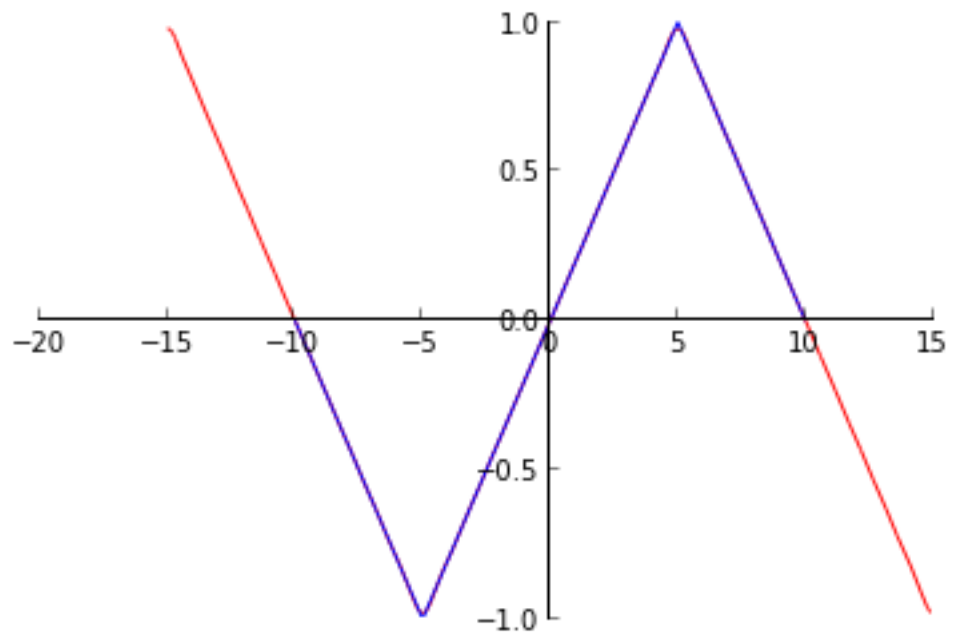
In [21]: `graficaSerie(3)`



In [22]: `graficaSerie(4)`



In [23]: `graficaSerie(10)`



In []: