El método variacional

A partir de la ecuación del péndulo (linealizada) obtenga una solución numérica por medio del método variacional para el trayecto que va desde su punto más alto hasta el más bajo ($\frac{1}{4}$ de periodo).

- Escriba la ecuación a resolver en su variacional (forma débil). Expresa el problema a lo sumo en derivadas primeras.
- Realice una interpolación lineal (aproximación lineal) y escriba las ecuaciones a resolver para un único “elemento finito”.
- Ensamble los “elementos finitos”. Luego imponga las condiciones de contorno y halle la solución para el sistema ensamblado.

Solución

(a) La ecuación del péndulo simple (linealizada) es la siguiente

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (1)$$

donde θ es el ángulo con que oscila el péndulo. La ecuación así planteada está en su forma “fuerte” porque debe cumplirse instante a instante. Por ejemplo si provocamos un desplazamiento “virtual” (imaginario) $\delta\theta$ obtendremos que

$$\delta\theta \ddot{\theta} + \delta\theta \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{\ell} \frac{\theta^2}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

es decir, debe cumplirse que la energía (escrita entre paréntesis en la ecuación anterior) sea mínima en todo instante. Pero si “relajamos” esta condición, y la hacemos un poco más “débil”, podemos pedir en su lugar que

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta\theta \ddot{\theta} + \delta\theta \frac{g}{\ell} \theta \right) dt = 0 \quad (3)$$

¿Por qué pediríamos semejante cosa?

Porque la ec. (1) es muy difícil de resolver y queremos encontrar una solución más sencilla (calculable numéricamente). La dificultad viene dada porque la ec. (1) se tiene que cumplir instante a instante. Pero si la cumplimos dentro de un intervalo pequeño $\Delta t = t_2 - t_1$, quizás encontremos una solución más simple.

Si Ud. está pensando que pasar de la forma “fuerte” a la “débil” es como “hacer trampa”, la respuesta es “sí, pero...”.

Si se reconoce la dificultad en hallar una solución *exacta* para la ec. (1) entonces nos debemos conformar con una solución *parecida*. En todo caso, siempre nos reservamos el derecho de achicar Δt todo lo que querramos para que la aproximación sea tan cercana a la solución exacta como deseemos.

El término en derivadas segundas molesta. Efectivamente, molesta porque las condiciones de contorno para un sistema de segundo orden, en general, se expresan sobre θ y $\dot{\theta}$. No queremos complicarnos con derivadas segundas. Así que aplicamos integración por partes para expresarlo como función de una derivada primera. O sea

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\theta \ddot{\theta} dt = \delta\theta \dot{\theta} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (\delta\dot{\theta}) \dot{\theta} dt = \left[\delta\theta(t_2) \dot{\theta}(t_2) - \delta\theta(t_1) \dot{\theta}(t_1) \right] - \int_{t_1}^{t_2} (\delta\dot{\theta}) \dot{\theta} dt \quad (4)$$

Reemplazando esta integral en la ec. (3) resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[(\delta\dot{\theta}) \dot{\theta} - \frac{g}{\ell} \theta \delta\theta \right] dt = \delta\theta(t_2) \dot{\theta}(t_2) - \delta\theta(t_1) \dot{\theta}(t_1) \quad (5)$$

Obsérvese que se acomodó todo para que en el lado izquierdo de la igualdad figuren los θ y $\delta\theta$ en el rango $t_1 \leq t \leq t_2$, mientras que en el lado derecho sólo aparecen magnitudes evaluadas en los extremos t_1 y t_2 .

(b) La ec. (5) es “débil” y *no* se cumple instante a instante. Sólo pide que el variacional (la integral) sea igual a la condición de extremos

$$\delta\theta(t_2) \dot{\theta}(t_2) - \delta\theta(t_1) \dot{\theta}(t_1) \quad (6)$$

Observemos que, en principio, tenemos dos magnitudes desconocidas: $\delta\theta$ y θ . La primera corresponde al desplazamiento virtual que *decidimos provocar*. Esto es importante porque $\delta\theta$ es *arbitrario* y lo podemos elegir nosotros, siempre y cuando se cumpla la condición (5). Si hubiésemos mantenido la forma “fuerte” (2) sólo hubiéramos podido provocar desplazamientos de mínima energía.

Por otro lado, θ es la magnitud que queremos hallar y que permanece aún desconocida. Sin embargo, sólo nos basta con que se cumpla la condición (5). Esta condición es más “relajada” que la ec. (1), así que, en principio, puede ser cualquier función, mientras que (insistimos) se cumpla la ec. (5).

Vamos a *elegir* para θ la función más simple posible, que es la función lineal

$$\theta(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \theta(t_1) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \theta(t_2) \quad (7)$$

donde la relación anterior es una interpolación lineal entre los valores extremos $\theta(t_1)$ y $\theta(t_2)$.

Vamos a simplificar un poco la notación. Llamamos $h = t_2 - t_1$, $\theta_1 = \theta(t_1)$ y $\theta_2 = \theta(t_2)$. Entonces, reemplazando la interpolación (7) en (5) y escribiendo todo en la notación simplificada resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\theta_2 - \theta_1}{h} (\delta\dot{\theta}) - \frac{g}{\ell} \left(\frac{t_2\theta_1}{h} - \frac{t_1\theta_2}{h} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{h} t \right) \delta\theta \right] dt = (\delta\theta_2) \dot{\theta}_2 - (\delta\theta_1) \dot{\theta}_1 \quad (8)$$

Atención: No nos detuvimos a meditar si la cantidad de incógnitas supera a la cantidad de condiciones que es necesario cumplir.

La única condición que se debe cumplir es la ec. (8). Según la interpolación (7), θ depende de los valores extremos θ_1 y θ_2 . Por lo tanto, hasta el momento hay dos incógnitas y una única condición a cumplir.

Para generar dos condiciones debemos realizar *dos* desplazamientos virtuales. Recordemos que los desplazamientos virtuales son arbitrarios, así que estamos habilitados para elegir desplazamientos cualesquiera. En definitiva, lo que haremos es “probar” con dos desplazamientos distintos y ver qué pasa. Por eso es que $\delta\theta$ se conoce también como “función de prueba”.

¿La solución dependerá de los $\delta\theta$ que elijamos? ¿No es acaso raro que esto ocurra?

Efectivamente, la solución, o mejor aún, la aproximación que hallemos dependerá de la “prueba” que hagamos. Esto no es realmente importante si la aproximación se parece a la solución exacta. Recordemos que la “relajación” del problema en su forma “débil” nos permite este tipo de flexibilidades.

Elegimos funciones lineales para los desplazamientos virtuales por simplicidad.

$$\begin{cases} \delta\theta = \frac{t_2 - t}{h} \Rightarrow \delta\theta_1 = 1, \quad \delta\theta_2 = 0 \\ \delta\theta = \frac{t - t_1}{h} \Rightarrow \delta\theta_1 = 0, \quad \delta\theta_2 = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Observar que esta elección es muy conveniente porque ahorra cálculos. Los valores extremos de $\delta\theta$ son simplemente 0 o 1.

Si hacemos los reemplazos correspondientes en la ec. (8) obtenemos, respectivamente

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\theta_1 - \theta_2}{h^2} - \frac{g}{\ell} \left(\frac{t_2\theta_1}{h^2} - \frac{t_1\theta_2}{h^2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{h^2} t \right) (t_2 - t) \right] dt = -\dot{\theta}_1 \\ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\theta_2 - \theta_1}{h^2} - \frac{g}{\ell} \left(\frac{t_2\theta_1}{h^2} - \frac{t_1\theta_2}{h^2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{h^2} t \right) (t - t_1) \right] dt = \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (10)$$

y realizando la integración correspondiente se obtiene el sistema

$$\begin{cases} \frac{\theta_1 - \theta_2}{h} - \frac{g}{\ell} h \left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_2}{6} \right) = -\dot{\theta}_1 \\ \frac{\theta_2 - \theta_1}{h} - \frac{g}{\ell} h \left(\frac{\theta_1}{6} + \frac{\theta_2}{3} \right) = \dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (11)$$

Escrito en forma matricial, el sistema a resolver para este “elemento finito” es

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Hay varias observaciones respecto de este sistema

- El sistema sólo depende de los valores en los extremos del “elemento”. Esto se debe a que la solución lineal fue *propuesta* para el interior del intervalo entre t_1 y t_2 . Los valores a “ajustar” son los extremos del elemento. Esto no es raro porque nos dice que, más allá de la solución *propuesta*, ésta debe estar sometida a las condiciones de borde o contorno (como ocurre en todo problema físico).
- Queda la impresión de que hubiera cuatro incógnitas: θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$. Sin embargo, aún no se impusieron las condiciones de contorno (o de borde). Se volverá sobre este punto después de “ensamblar los elementos”.

(c) Ensamblado de los elementos

Para que la solución propuesta se aproxime tanto como querramos a la solución exacta de la ec. (1) debemos considerar “elementos” de tamaño h muy chico. Luego unimos cada “elemento finito” uno con otro para hallar la solución completa. Este proceso se llama “ensamblado” de los elementos.

Vamos a *conectar* un elemento consecutivamente con otro. Por ejemplo, supongamos que queremos hallar los valores de θ sucesivos a lo largo del tiempo. Es decir,

$$\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n.$$

entonces debe cumplirse que las magnitudes θ_2 y $\dot{\theta}_2$ de un elemento son las mismas que las magnitudes θ_1 y $\dot{\theta}_1$ del elemento consecutivo. Llamemos a este punto (o “nodo”) θ_i . Escribimos, entonces el sistema matricial (12) para aquellos elementos consecutivos en los que figura θ_i

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_{i-1} \\ \theta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_{i-1} \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_i \\ \theta_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}_i \\ \dot{\theta}_{i+1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Si sumamos la segunda fila de (13) y la primera fila de (14) resulta

$$\frac{1}{h}(-\theta_{i-1} + 2\theta_i - \theta_{i+1}) - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6}(\theta_{i-1} + 4\theta_i + \theta_{i+1}) = 0 \quad (15)$$

donde esto se cumple para cualquier $i = 1, \dots, n - 1$. Obsérvese que los $\dot{\theta}_i$ intermedios (velocidades intermedias) ya no figuran, salvo en la primera fila del sistema (13) para $i = 1$ o en la segunda fila del sistema (14) para $i = n - 1$. Ambas filas no tienen con quien sumarse. Las escribimos

$$\begin{cases} \frac{1}{h}(\theta_0 - \theta_1) - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6}(2\theta_0 + \theta_1) = -\dot{\theta}_0 \\ \frac{1}{h}(-\theta_{n-1} + \theta_n) - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6}(\theta_{n-1} + 2\theta_n) = \dot{\theta}_n \end{cases} \quad (16)$$

Para que el problema físico quede bien determinado, debemos imponer las condiciones de contorno correspondientes a este caso en particular. Sabemos que el movimiento comienza con una posición conocida $\theta_0 = \theta(0)$ y finaliza en el punto más bajo, es decir en $\theta_n = 0$. Además, la velocidad inicial es nula, o sea, $\dot{\theta}(0) = 0$. Y al final del proceso es $\dot{\theta}_n = \dot{\theta}_{\max}$.

El sistema acoplado (conectado) resulta entonces

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{\theta}_{\max} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Obsérvese que θ_0 y θ_n son conocidos (debido a las condiciones de contorno). Por lo tanto, la primera columna y la última (correspondientes a θ_0 y θ_n , respectivamente) deben pasar al lado derecho de la igualdad. De esta manera las incógnitas permanecen del lado izquierdo, mientras que los datos están en el lado derecho

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & 2 \\ \dots & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 4 \\ \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{\theta}_{\max} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} + \frac{g}{\ell} \frac{h}{3} \\ \frac{1}{h} + \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 \quad (18)$$

En la primera fila y en la última no hay nada que averiguar, así que podemos eliminarlas del sistema. Ambas contienen la información sobre $\dot{\theta}(0)$ y $\theta_{\max}$, respectivamente. Eso significa que no usaremos esas condiciones y sólo necesitamos indicar la posición inicial y final del péndulo. Se trata, entonces, de un problema con condición de Dirichlet. El sistema a resolver es el siguiente

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \theta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 \quad (19)$$

Podemos ejemplificar esto si consideramos un sistema con $n = 3$ elementos finitos. Tomamos $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\ell = 1 \text{ m}$, $\theta_0 = 1$ y $h = 2\pi\sqrt{\ell/g}/(4n) = 0,16717$. Entonces

$$\left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} + \frac{g}{\ell} \frac{h}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \theta_0 \quad (20)$$

O sea

$$\begin{pmatrix} 10,87 & -6,25 \\ -6,25 & 10,87 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6,25 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8589 \\ 0,4939 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Si queremos comparar este resultado con la solución exacta $\theta_0 \cos(\omega t)$, debemos tomar $\omega = 2\pi/T = 3,14 \text{ s}^{-1}$ (para este ejemplo). Los puntos a evaluar son $\theta_1 = \theta_0 \cos(\omega h)$ y $\theta_2 = \theta_0 \cos(2\omega h)$. Ambos valen 0,8653 y 0,4972, respectivamente.